

I. megoldás. Az $x^2 + x + 1$ értéke minden egész x -re egész, és nem lehet nulla, mert $x^2 + x + 1 = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} \geq \frac{3}{4}$.

Tehát beszélhetünk az $(x^2 + x + 1)$ -gyel való oszthatóságról. Végezzük el az

$$x^{3p} + x^{3m+1} + x^{3n+2} = (x^{3p} - 1) + x(x^{3m} - 1) + x^2(x^{3n} - 1) + x^2 + x + 1$$

átalakítást!

Ha r pozitív egész, akkor

$$\begin{aligned} x^{3r} - 1 &= (x^3)^r - 1 = (x^3 - 1)((x^3)^{r-1} + (x^3)^{r-2} + \dots + x^3 + 1) = \\ &= (x - 1)(x^2 + x + 1)(x^{3r-3} + \dots + x^3 + 1), \end{aligned}$$

és ez osztható $(x^2 + x + 1)$ -gyel. Ezért osztható $x^{3p} - 1$, $x^{3m} - 1$ és $x^{3n} - 1$ is $(x^2 + x + 1)$ -gyel.

Az $x^{3p} + x^{3m+1} + x^{3n+2}$ számot sikerült tehát felbontanunk négy $(x^2 + x + 1)$ -gyel osztható szám összegére, tehát ő maga is osztható $(x^2 + x + 1)$ -gyel.

II. megoldás. $p = m = n = 1$ esetén

$$x^{3p} + x^{3m+1} + x^{3n+2} = x^3(1 + x + x^2),$$

ami osztható $(x^2 + x + 1)$ -gyel, ha x egész. Tegyük most fel, hogy a p , m , n pozitív egészekre már tudjuk, hogy ha x egész, akkor $x^2 + x + 1$ osztója az $x^{3p} + x^{3m+1} + x^{3n+2}$ számnak. Belátjuk, hogy ha a p , m , n számok egyikét eggyel növeljük, továbbra is $(x^2 + x + 1)$ -gyel osztható számot kapunk. Ekkor ugyanis az $x^{3p} + x^{3m+1} + x^{3n+2}$ szám megváltozása

$$x^{3(r+1)} - x^{3r} = x^{3r}(x^3 - 1) = x^{3r}(x - 1)(x^2 + x + 1)$$

osztható $(x^2 + x + 1)$ -gyel, tehát az új szám is osztható $(x^2 + x + 1)$ -gyel, ahol r a p , m és n közül valamelyik. Nyilvánvaló, hogy a $p = m = n = 1$ számhármashoz tetszőleges p , m , n pozitív egészekből álló számhármashoz eljuthatunk véges sok ilyen lépés alkalmazásával. $p = m = n = 1$ -re a kiindulási szám osztható $(x^2 + x + 1)$ -gyel, és minden lépésben újra $(x^2 + x + 1)$ -gyel osztható számhoz jutunk, ami a feladat állítását igazolja.

Megjegyzés. Általában is igaz $n \geq 1$ -re, hogy ha $k_1, k_2, \dots, k_n$ nem negatív egészek és x egész, akkor $x^{k_1 n} + x^{k_2 n+1} + \dots + x^{k_n n+n-1}$ osztható $(1 + x + \dots + x^{n-1})$ -nel. Ez abból adódik, hogy az $f(x) = x^{k_1 n} + x^{k_2 n+1} + \dots + x^{k_n n+n-1}$ polinom osztható a $g(x) = 1 + x + \dots + x^{n-1}$ polinommal. A hányados a Gauss-féle lemma miatt (lásd *A prímszámok egy jellemzéséről*) a $h(x)$ hányados egész együtthatós, tehát ha x egész, akkor $h(x)$ is egész, és $f(x) = h(x) \cdot g(x)$. Az pedig, hogy $f(x)$ osztható $g(x)$ -szel, következik *Bezout* tételéből (Molnár Emil: Matematikai versenyfeladatok, 493. old.): $g(x)$ -nek mind az $n-1$ (egymástól különböző és komplex) gyöke $f(x)$ -nek is gyöke, és ekkor *Bezout* tétele szerint g osztója f -nek. Valóban, ha $g(\alpha) = 0$, akkor $0 = (\alpha - 1) g(\alpha) = (\alpha - 1)(1 + \alpha + \dots + \alpha^{n-1}) = \alpha^n - 1$, így

$$f(\alpha) = (\alpha^n)^{k_1} + \alpha \cdot (\alpha^n)^{k_2} + \dots + \alpha^{n-1} (\alpha^n)^{k_n} = 1 + \alpha + \dots + \alpha^{n-1} = 0,$$