

Észrevehetjük, hogy $D_1D_2 \geq E_1E_2$, hiszen E_1E_2 egy húr a D_1D_2 átmérőjű körben; ha $AB = AC$, akkor itt egyenlőség áll.

1985-03-111-1.eps

Továbbá legyen $AC > AB$. Húzzunk párhuzamost D_1D_2 -vel a B ponton keresztül, és messe ez az AC oldalt G -ben, az A -ból kiinduló szögfelezőt pedig F -ben! Ekkor a D_1D_2GB négyszög szimmetrikus trapéz. Mivel F felezi a BG , és A_0 a BC szakaszt, ezért $A_0F \parallel D_2G$. Így D_1A_0FB is szimmetrikus trapéz, ezért átlói egyenlőek: $BA_0 = D_1F$. Az utóbbi szakasz tükröképe az A -ból induló szögfelezőre a D_2F szakasz, így $D_1F = D_2F$. A háromszög-egyenlőtlenségből:

$$D_1F + D_2F \geq D_1D_2.$$

Az eddigieket összegezve:

$$\begin{aligned} BC &= 2BA_0 = 2D_1F = D_1F + D_2F \geq D_1D_2 \geq E_1E_2 \\ BC &\geq E_1E_2. \end{aligned}$$

Itt egyenlőség pontosan akkor áll, ha F rajta van a D_1D_2 egyenesen, vagyis ha B és C is, tehát $AB = AC$, a háromszög egyenlő szárú.

Megjegyzés. Rámutatunk a kérdés feltevésének hátterére. A könnyen kapott egyenlőtlenség azt jelenti, hogy ha vesszük azt a forgáskúpot, melynek tengelye a szögfelező és egy alkotója az AB egyenes, és ezt metsszük az ABC síkra merőleges, a BC -n átmenő síkkal, akkor a BC szakasz a keletkező metszet ellipszis nagy tengelye, A_0 a középpontja, az E_1E_2 szakasz pedig megadja a kistengely hosszát. D_1D_2 az A_0 -on átmenő és a tengelyre merőleges metszet (kör) átmérője.