

A bal oldalon álló kifejezés értéke az $x = 0$ helyen -1 , az $x = 1$ helyen $+2$. Így a megoldandó egyenlőtlenség nem azonosság, meg kell határoznunk a bal oldal gyökeit. Ott az

$$f(x) = x^6 + 4x^5 + 2x^4 - 6x^3 - 2x^2 + 4x - 1$$

egész együtthatós polinom áll, ennek racionális gyökei csak az olyan p/q alakú számok közül kerülhetnek ki, amelyekre p osztója a konstans tagnak, q pedig a legmagasabb fokú tag együtthatójának. Mivel esetünkben mindkét szám abszolút értéke 1, racionális gyökként csak a -1 és $+1$ jöhet szóba. Ezek viszont nem gyökök: $f(-1) = -2$ és $f(1) = 2$.

Így meg kell próbálnunk a polinomot szorzattá alakítani. Vegyük észre, hogy az együtthatók abszolút értékei szimmetrikusak a középső tagra, és hogy a párokban az előjelek felváltva eltérnek, illetve megegyeznek. Az ilyen polinomokat reciprok polinomoknak szokás nevezni és gyökeik keresésében az $y = x - 1/x$ új változó bevezetése segíteni szokott. Tegyük mi is ezt! Legyen $x \neq 0$ és a polinomból emeljünk ki x^3 -t:

$$\begin{aligned} f(x) &= x^3 \left(\left(x^3 - \frac{1}{x^3} \right) + 4 \left(x^2 + \frac{1}{x^2} \right) + 2 \left(x - \frac{1}{x} \right) - 6 \right) = \\ &= x^3 \left(\left(x^3 - \frac{1}{x} \right)^3 + 3 \left(x - \frac{1}{x} \right) + 4 \left(x - \frac{1}{x} \right)^2 + 8 + 2 \left(x - \frac{1}{x} \right) - 6 \right) = \\ &= x^3 (y^3 + 4y^2 + 5y + 2). \end{aligned}$$

Az itt álló második tényezőt próbáljuk szorzattá bontani. Észrevesszük, hogy az $y^3 + 4y^2 + 5y + 2$ kifejezés az $y = -1$ helyen eltűnik, tehát belőle $(y + 1)$ kiemelhető:

$$y^3 + 4y^2 + 5y + 2 = (y + 1)(y^2 + 3y + 2) = (y + 1)(y + 1)(y + 2).$$

Ezt $f(x)$ fenti alakjába visszaírva

$$f(x) = x^3 (y + 1)^2 (y + 2) = x^2 \left(x - \frac{1}{x} + 1 \right)^2 \cdot x \left(x - \frac{1}{x} + 2 \right) = (x^2 + x - 1)^2 (x^2 + 2x - 1).$$

A jobb és bal oldal $x \neq 0$ -ra a fenti átalakítások ekvivalenciája miatt egyezik meg, $x = 0$ -ra pedig $f(0) = -1$, és a jobb oldal értéke is -1 . A keresett szorzattá alakítást megkaptuk, a megoldandó egyenlőtlenség tehát ilyen alakú:

$$(x^2 + x - 1)^2 (x^2 + 2x - 1) \geq 0.$$

Az első tényező egy valós szám négyzete, így biztosan nemnegatív. Így az egyenlőtlenség akkor áll, ha vagy

$$x^2 + x - 1 = 0,$$

vagy

$$x^2 + 2x - 1 \geq 0.$$

Az első eset az $x_1 = (-1 - \sqrt{5})/2$ és az $x_2 = (-1 + \sqrt{5})/2$ számokra teljesül, a második pedig akkor, ha $x \leq -1 - \sqrt{2}$ vagy $x \geq -1 + \sqrt{2}$. Ez utóbbi magában foglalja x_2 -t, hiszen $x_2 > -1 + \sqrt{2}$.

Összefoglalva, az egyenlőtlenség pontosan akkor teljesül, ha

$$x \leq -1 - \sqrt{2}, \quad \text{vagy} \quad x = \frac{-1 - \sqrt{5}}{2}, \quad \text{vagy} \quad x \geq -1 + \sqrt{2}.$$

Megjegyzés. Sok megoldó okoskodott a szorzattá bontás után úgy, hogy egy szám négyzete nemnegatív, tehát az egyenlőtlenség ekvivalens az $x^2 + 2x - 1 \geq 0$ egyenlőtlenséggel. Ez a gondolat hibás, az ilyen dolgotra 3 pont járt.