„Szám”-on a feladat szövegében és a megoldás során is értelemszerűen pozitív egész számot értünk.

Adott $N \geq 1$ szám esetén jelölje $L(N)$ és $K(N)$ az N szám $4k+1$, illetve $4k-1$ alakú osztóinak a számát. Legyen még $D(N) = L(N) - K(N)$, azt kell megmutatnunk, hogy $D(N) \geq 0$. Ehhez szükségünk lesz a $D(N)$ függvénynek az alábbi tulajdonságára:

Ha N_1 és N_2 relatív prímek, akkor

$$D(N_1 \cdot N_2) = D(N_1) \cdot D(N_2). \tag{1}$$

(1) bizonyításához legyenek N_1 és N_2 relatív prímek. Az $N_1 \cdot N_2$ páratlan osztói pontosan azok az $n_1 \cdot n_2$ alakban írható számok, melyekre n_1 az N_1-nek, n_2 pedig az N_2-nek páratlan osztója. Két páratlan szám szorzata pedig 4-gyel osztva aszerint ad 1 vagy -1 maradékot, hogy maga a két szám 4-gyel osztva egyforma maradékot ad-e vagy sem. Ennek alapján az alábbi összefüggésekhez jutunk:

$$L(N_1 \cdot N_2) = L(N_1) \cdot L(N_2) + K(N_1) \cdot K(N_2), \tag{2}$$

$$K(N_1 \cdot N_2) = K(N_1) \cdot L(N_2) + L(N_1) \cdot K(N_2). \tag{3}$$

(2)-ből (3)-at kivonva éppen (1)-et kapjuk.

A feladat állítása most már könnyen adódik a következők alapján. A számelmélet alaptétele szerint minden szám egyértelműen felírható különböző prímszámok nem negatív egész kitevős hatványainak szorzataként. Mivel pedig különböző prímek hatványai egymáshoz relatív prímek, így ha $N = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \ldots p_n^{\alpha_n}$, akkor (1) ismételt alkalmazásával

$$D(N) = D(p_1^{\alpha_1}) \cdot D(p_2^{\alpha_2}) \cdot \ldots \cdot D(p_n^{\alpha_n}). \tag{4}$$

Vizsgáljuk most meg $D(N) = D(p^\alpha)$ értékét, ahol p prím, α pedig pozitív egész!

Ha $p = 2$, akkor $D(p^\alpha) = 1 - 0 = 1$, hiszen 2^α egyetlen páratlan osztója az 1.

Ha p páratlan prím, akkor p^α osztói $p^0, p, p^2, \ldots, p^\alpha$. Ezek közül biztosan $4k+1$ alakúak azok, ahol p kitevője páros – ha p $4k-1$ alakú, akkor pontosan ezek, egyébként valamennyi. Mivel pedig az α-nál nem nagyobb nem negatív egészeknek legalább a fele páros, azért $D(p^\alpha) \geq 0$.

Azt kaptuk, hogy $D(N)$ nem negatív számok szorzataként áll elő, így maga sem lehet negatív. Ezzel a bizonyítást befejeztük.

Megjegyzések. Ha N $4k-1$ alakú, akkor közvetlenül adódik, hogy a kétféle páratlan osztók száma egyenlő. Ilyenkor ugyanis a $d \to N/d$ megfeleltetés kölcsönösen egyértelműen képezi le a $4k-1$ alakú osztók halmazát a $4k+1$ alakú osztók halmazára.

A bizonyítás alapján általában is jellemezhetjük azokat a számokat, amelyekre $L(N) = K(N)$. A (4) felbontás szerint erre pontosan akkor kerül sor, ha N prímfelbontásában van olyan p^α tényező, melyre $D(p^\alpha) = 0$. Ez pedig nyilván akkor és csak akkor igaz, ha p $4k-1$ alakú és α páratlan.

Azokat a számelméleti függvényeket, amelyekre teljesül (1), azaz a prímhatványokon fölvett értékeik a megoldásban látható módon határozzák meg őket, *multiplikatív* függvényeknek nevezzük. Többek között ilyen az n szám osztóinak $d(n)$ száma, $\sigma(n)$ összege és az Euler-féle nevezetes $\varphi(n)$ függvény is, amely az n-nél kisebb, n-hez relatív prím számok száma.