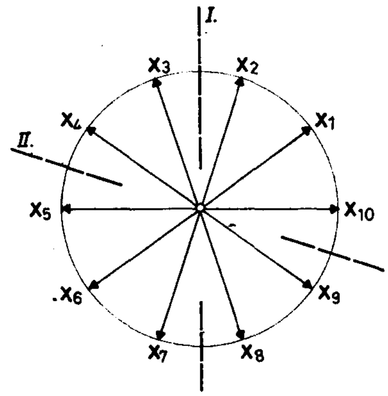
Ilyen n-szög létezésének szükséges és elégséges feltétele, hogy az 1, 2, 3, ..., n hosszúságú, megfelelő irányú vektorok összege a nullvektor legyen. Megfelelő irányon azt értjük, hogy bármely két egymás utáni oldalvektor iránykülönbsége a forgási irányt is beleértve $360°/n$, ti. amennyi az egyenlő szögű konvex n-szög külső szöge. Jelöljük $i = 1, 2, \ldots, n$-re az i-edik oldal hosszát a_i-vel, az oldallal egyező irányú egységvektort $\mathbf{x}_i$-vel. Az $\mathbf{x}_i$ vektorokat közös kezdőpontból felmérve azok végpontjai szabályos n-szöget határoznak meg.

Feladatunk tehát az 1, 2, ..., n számoknak olyan $a_1, \ldots, a_n$ permutációját meghatározni, amire az

(1) $$a_1\mathbf{x}_1 + a_2\mathbf{x}_2 + \ \ldots\ + a_n\mathbf{x}_n$$

vektorösszeg éppen a nullvektor. Ha sikerül ilyen permutációt találnunk, akkor az $a_1\mathbf{x}_1$, $a_2\mathbf{x}_2$ stb. vektorokat egymás után fölmérve, egy záródó konvex n-szöget kapunk, amelynek szögei egyenlők, oldalai pedig valamilyen sorrendben 1, 2, 3, ..., n hosszúságúak. Ha pedig nincs ilyen permutáció, akkor a megfelelő sokszög sem létezik.



1. ábra

Térjünk most rá az $n = 10$ esetre. A közös kezdőpontból induló $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_{10}$ vektorokat az 1. ábra mutatja. Az (1) vektorösszeg pontosan akkor $\mathbf{0}$, ha két, nem párhuzamos egyenesre eső vetülete is 0. Az egyik egyenes legyen az $\mathbf{x}_{10}$ (és $\mathbf{x}_5$) vektorokra merőleges egyenes. Az $a_i\mathbf{x}_i$ ilyen irányú komponense $a_i \sin(i \cdot 36°)$. A $\sin i \cdot 36°$ tényező abszolút értéke – azon fölül, hogy $i = 5$ és $i = 10$ esetén 0 – kétféle értéket vehet föl az összegezés során. Ennek alapján a tagokat két zárójelbe gyűjtjük:

(1) $$(a_1 + a_4 - a_6 - a_9)\sin 36° + (a_2 + a_3 - a_7 - a_8)\sin 72° = 0.$$

Feladatunkban a zárójelek értéke egész szám, másrészt

$$\frac{\sin 72°}{\sin 36°} = 2\cos 36° = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$$

irracionális szám. Emiatt az egyenlőség csak úgy teljesülhet, ha a zárójelek értéke külön-külön 0. Ezt mindjárt így írjuk:

(2) $$a_1 - a_6 = a_9 - a_4$$

(3) $$a_3 - a_8 = a_7 - a_2,$$

továbbá (2) és (3) teljesülése esetén az (1) összegvektor $\mathbf{x}_{10}$-re merőleges vetülete 0.

Megismételve az eljárást az $\mathbf{x}_2$ és $\mathbf{x}_7$ vektorokra merőleges egyenesre is, adódik, hogy (1)-nek erre eső vetülete akkor és csak akkor, 0, ha

(4) $$a_3 - a_8 = a_1 - a_6$$

valamint

(5) $$a_5 - a_{10} = a_9 - a_4$$

egyaránt fennáll.

Észrevesszük, hogy (2) két oldalának közös értékét d-vel jelölve (2)–(5) éppen azt mondja ki, hogy a keresett tízszög szemközti, párhuzamos oldalpárjai hosszának különbsége – alkalmas irányban véve – egyenlő. És úgy lesznek előjelre nézve is egyenlők, ha pl. mindig a páratlan indexű oldalból vonjuk ki a szemben fekvő, tehát páros indexű oldal hosszát. S mivel ilyen esetben (2)–(5) automatikusan teljesül is, a tízszög záródni fog.

Már ennyi elég ahhoz, hogy példát adhassunk a kívánt tízszögre. $d=-5$ esetén az $(a_i,\ a_{i+5})$ szemben fekvő oldalpár számára $i=1,\,2,\,3,\,4,\,5$ mellett vehető a következő oldalhossz-párok tetszőleges permutációja:

a_i	1	7	3	9	5
a_{i+5}	6	2	8	4	10

Másik példa az oldalhosszak párba állítására $d=-1$:

a_i	1	4	5	8	9
a_{i+5}	2	3	6	7	10

Befejezésül belátjuk, hogy $|d|$ az előírt oldalhosszak mellett csak 1 vagy 5 lehet. Jelöljük a páratlan indexű oldalak összegét U-val, a párosakét P-vel, ekkor a föntiek szerint $U-P=5d$, másrészt $U+P=55$, amiből

$$\frac{U}{5}=\frac{11+d}{2},\qquad \frac{P}{5}=\frac{11-d}{2}.$$

Eszerint d nem lehet páros.

Nyilván nem lehet $d\geq 9$. De még a $d=7$ különbséget is csak három oldalhossz párból lehet előállítani:

$$7=10-3=9-2=8-1.$$

Ha pedig $d=3$-at követelünk meg, az 5 (és 6) számtól föl- és lefelé 1–1 szám van 3 egységnyi távolságban: a 2 és a 8, és egyik sem alkothat 3 értékű különbséget máshogy, mint az 5-össel.