

A paralelogramma átlói felezik egymást, legyen tehát F az AC és BD átlók közös felezőpontja. Nyilván $AF/BF = AC/BD$, elég tehát belátni, hogy

$$\frac{AF}{BF} \leq \operatorname{ctg} \frac{BAD_{\triangleleft}}{2}.$$

1984-12-442-1.eps

Legyen K az ABD háromszög köré írt kör középpontja. A feltétel szerint $BAD_{\triangleleft} \leq ADC_{\triangleleft}$. E két szög összege 180° , tehát $BAD_{\triangleleft} \leq 90^\circ$. Ebből következik, hogy K és A a BD egyenesnek ugyanazon a partján van. Legyen G a BD szakasz FK felező merőlegesének valamint az ABD köré írt körnek az a metszéspontja, amire G és A a BD egyenesnek ugyanarra a partjára esik. A BAD és a BGD kerületi szögek egyenlők, GF pedig felezi a BGD szöget, tehát

$$\operatorname{ctg} \frac{BAD_{\triangleleft}}{2} = \operatorname{ctg} \frac{BGD_{\triangleleft}}{2} = \operatorname{ctg} BGF_{\triangleleft} = \frac{GF}{BF}.$$

Másrészt

$$GF = GK + KF = AK + KF \geq AF,$$

a háromszög egyenlőtlenség szerint. Azt kaptuk tehát, hogy

$$\operatorname{ctg} \frac{BAD_{\triangleleft}}{2} = \frac{GF}{BF} \geq \frac{AF}{BF},$$

ahogy állítottuk.

Egyenlőség csak akkor állhat fenn, ha $AK + KF = AF$. Ez két esetben fordulhat elő: ha $A = G$ vagy ha $K = F$. Előbbi esetben a paralelogramma rombusz, mert $AB = BD$, utóbbi esetben a paralelogramma téglalap, mert $BAD_{\triangleleft} = 90^\circ$.