Bizonyítsuk be, hogy minden n természetes számra

$$\sqrt[n]{n} < 1 + \sqrt{\frac{2}{n}}. \tag{1}$$

Megoldás: Föltehető, hogy $n \geq 2$, hisz $n = 1$-re az állítás nyilvánvalóan igaz. Emeljük (1) mindkét oldalát n-edik hatványra. Az alapok pozitívak, így az alábbi, (1)-gyel ekvivalens egyenlőtlenséget kapjuk:

$$n < \left(1 + \sqrt{\frac{2}{n}}\right)^n, \tag{2}$$

(2) jobb oldalát a binomiális tétel szerint kifejtve kapjuk, hogy:

$$\left(1 + \sqrt{\frac{2}{n}}\right)^n = 1 + \binom{n}{1}\left(\sqrt{\frac{2}{n}}\right) + \binom{n}{2}\left(\sqrt{\frac{2}{n}}\right)^2 + \ldots + \binom{n}{n}\left(\sqrt{\frac{2}{n}}\right)^n. \tag{3}$$

Mivel $n \geq 2$, (3) jobb oldala legalább 3 tagból áll, így nem nő, ha csak az első 3 tagját hagyjuk meg, hiszen minden tag pozitív. Eszerint

$$\left(1 + \sqrt{\frac{2}{n}}\right)^n \geq 1 + \binom{n}{1}\sqrt{\frac{2}{n}} + \binom{n}{2}\left(\sqrt{\frac{2}{n}}\right)^2 = 1 + \sqrt{2n} + (n-1) = n + \sqrt{2n}. \tag{4}$$

$n + \sqrt{2n} > n$ miatt (4)-ből következik a bizonyítandó (1) egyenlőtlenség.

Megjegyzések. 1. A fenti bizonyításban lényeges volt az $n = 1$ eset megkülönböztetése, hisz a második rész gondolatmenete ekkor nem alkalmazható.

2. Belátjuk, hogy fennáll a bizonyítandónál élesebb

$$\sqrt[n]{n} < 1 + \frac{1}{\sqrt{n}}$$

egyenlőtlenség is. Az ezzel $n \geq 2$ estén ekvivalens $\frac{1}{\sqrt[n]{n} - 1} > \sqrt{n}$ egyenlőtlenséget bizonyítjuk. A bal oldalon a nevezőt gyöktelenítve:

$$\frac{1}{\sqrt[n]{n} - 1} = \frac{(\sqrt[n]{n})^{n-1} + \ldots + \sqrt[n]{n} + 1}{(\sqrt[n]{n})^n - 1} = \frac{(\sqrt[n]{n})^{n-1} + \ldots + \sqrt[n]{n}}{n-1} + \frac{1}{n-1}.$$

A kapott egyenlőség jobb oldalán $n - 1$ darab pozitív szám számtani közepe áll. E számok mértani közepe épp $\sqrt{n}$, ahonnan $\frac{1}{\sqrt[n]{n} - 1} \geq \sqrt{n} + \frac{1}{n-1} > \sqrt{n}$, és épp ezt akartuk bizonyítani.

3. Az $f(x) = 1 + \frac{1}{\sqrt{x}} - x^{\frac{1}{x}} (x > 0)$ függvény vizsgálatából is kiderül, hogy $x^{\frac{1}{x}} < 1 + \frac{1}{\sqrt{x}}$ minden pozitív valós x-re.