

A szerkesztést előkészítő elemzés (analízis) visszafordításával beláthatja az olvasó – ráhagyjuk –, hogy a kapott X , Y , X_2 , Y_2 pontokra teljesülnek a feladat feltételei, legfőképpen a $CX = BY$ és $CX_2 = BY_2$ egyenlőségek.

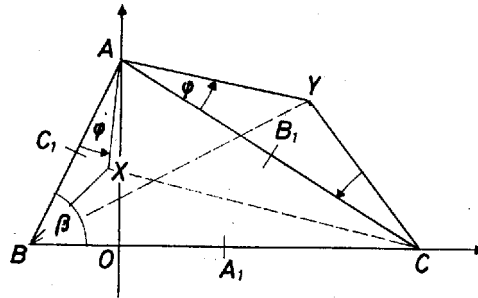
Annak belátását is ráhagyjuk az olvasóra, hogy $\lambda \neq 1$ esetén mindig két megfelelő X , Y pontpár jön létre. Ezzel teljesítettük feladatunkat.

Megjegyzések. 1. Feltűnhet a figyelmes olvasónak, hogy a kör éppen átmegy a B ponton. De tüstént beláthatja azt is, hogy ez szükségszerűség.

2. Számos dolgozat foglalkozott az ABX és ACY háromszögek hasonlóságának olyan eseteivel is, amikor nem az ugyanannyiadik csúcspárok felelnek meg egymásnak, továbbá amikor a két betűzés körüljárási iránya ellentétes. Abból csináltak problémát, hogy kifelé vagy befelé írják rá a háromszögeket az AB , AC oldalakra. Ez egyrészt megérthető „hasonló példák” alapján, másrészt éppen azt jelenti, hogy nem azt olvasták ki, hogy elsősorban *pontpárt* keresünk, hanem csak a mellékfeltételt.

Megemlítjük, hogy más megfeleltetésű hasonló háromszögpárral foglalkozott az F.2401. feladat (megoldása az 1983. novemberi számban, 119. old.), ott ABE és CAD voltak hasonlók (de nem szükségképpen egyenlő szárúak), és az az itteni jelölés szerint ABX és CAY lenne.

II. megoldás. Számítás alapján megszerkesztjük az egyenlő szárú háromszögeknek az AB és AC alapon levő szögét. Legyenek a háromszög csúcsainak koordinátái $A(0, 2d)$, $B(2e, 0)$, $C(2f, 0)$, ahol $d > 0$, $f > 0$ és $f > |e|$, ezáltal eleve $AC > AB$, kizártuk az érdektelen $AC = AB$ esetet (2. ábra). Legyenek továbbá az oldalak felezőpontjai rendre C_1 , A_1 , B_1 , $CBA \sphericalangle = \beta$, és a forgási irányt beleértve $BAX \sphericalangle = CAY \sphericalangle = \varphi$.



2. ábra

Ekkor A_1 , B_1 , C_1 koordinátái $(e + f, 0)$; (f, d) , valamint (e, d) , és X abszcisszája

$$e + C_1X \cdot \sin \beta = e + \frac{AB}{2} \operatorname{tg} \varphi \cdot \frac{2d}{AB} = e + d \operatorname{tg} \varphi = e + du,$$

ahol rövidítésül $u = \operatorname{tg} \varphi$, ezt fogjuk megszerkeszteni. Hasonlóan X ordinátája és Y koordinátái

$$d + eu, \quad Y(f + du, d + fu),$$

így a $BY = CX$ követelményből négyzetre emeléssel, majd rendezéssel

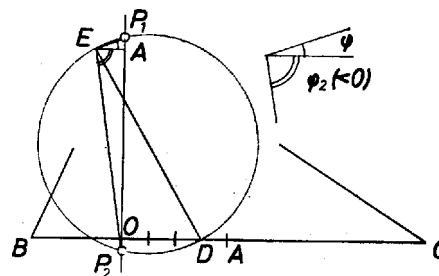
$$(f + du - 2e)^2 + (d + fu)^2 = (e + du - 2f)^2 + (d + eu)^2,$$

$$(1) \quad u^2 + \frac{8d}{e+f}u - 3 = 0,$$

ugyanis $e + f > 0$.

A (-3) -as állandó tagból látjuk, hogy (1)-nek két különböző valós gyöke van, ellentett előjelűek, továbbá abszolút értékre nézve a negatív gyök a nagyobb, mert u együtthatója pozitív.

Azt állítjuk, hogy a megfelelő φ szögeket megkaphatjuk a következő eljárással. Legyen az OA_1 szakasz A_1 -hez közelebbi negyedelő pontja D , mérjük föl A_1 -t irány és nagyság szerint A -ból: $AE = A_1D$, mossa a DE átmérőjű kör az OA egyenest P_1 -ben és P_2 -ben, ekkor a keresett szögek $\varphi_1 = AEP_1 > 0$ és $\varphi_2 = AEP_2 < 0$ (3. ábra).

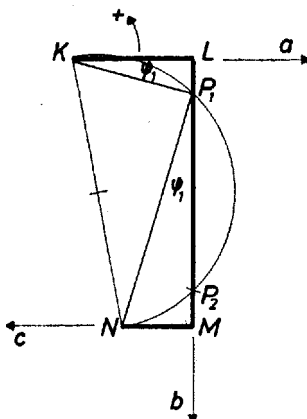


3. ábra

Igazolásul általában belátjuk a következő grafikus eljárás helyességét. Az

$$f(x) = ax^2 + bx + c = 0$$

egyenlet valós gyökeit az együtthatókból képezett $KLMN$ vázból kaphatjuk, ahol $KL \perp LM \perp MN$, és a KL, LM, MN irányított szakaszok hossza $KL = a, LM = b, MN = c$ (4. ábra). Az a, b, c tengelyeken a pozitív irány egymás után (-90°)-kal fordul el.



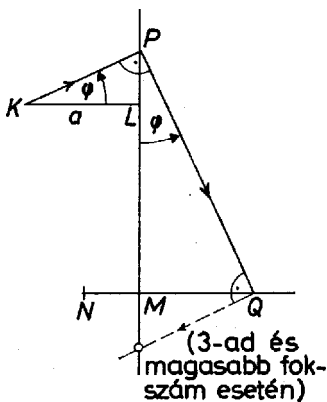
4. ábra

Ekkor a KN átmérőjű kör által LM -ből kimetszett P_1, P_2 pontokkal a gyökök

$$x_1 = \operatorname{tg} LKP_1, \quad x_2 = \operatorname{tg} LKP_2,$$

és a szögek irányítása az órajárással ellentétes irányú.

Legyen P az LM egyenes tetszőleges pontja és $LKP \angle = \varphi$, továbbá messe a P -ben KP -re állított merőleges az MN egyenest Q -ban.



5. ábra

Ekkor nagyság és irány szerint (5. ábra)

$$LP = a \operatorname{tg} \varphi,$$

$$MQ = PM \operatorname{tg} \varphi,$$

$$PM = a \operatorname{tg} \varphi + b,$$

$$QN = MQ + MN,$$

tehát

$$QN = (a \operatorname{tg} \varphi + b) \operatorname{tg} \varphi + c = f(x),$$

egyenletünk bal oldalának értéke a $\operatorname{tg} \varphi = x$ helyen.

Mármost szerkesztésünkben a Thalész-kör folytán a P_1 -ben (P_2 ben) állított merőleges éppen N -ben metszi az MN egyenest, így $QN = 0$, ami igazolja állításunkat.

Ezt az eljárást főntebb (1)-nek

$$(1) \quad \frac{1}{4}u^2 + \frac{2d}{e+f}u - \frac{3}{4} = 0$$

alakjára alkalmaztuk, K, L, M, N megfelelője rendre E, A, O és D . Amikor a $\frac{2d}{e+f}$ együttható megfelelőjének $AO = 2d$ -t vettük, $e + f = 1$ lett, majd $OD = -3/4$, végül $EA = +1$. Ezzel igazoltuk, hogy a 3. ábra $AE P_i \sphericalangle = \varphi_i$ szögeire $\operatorname{tg} \varphi_i = u_i$, ($i = 1, 2$), és ezek valóban eleget tesznek (1)-nek.

Megjegyzések. 1. Bevezetve a $BA_1 A \sphericalangle = \omega$ jelölést, az

$$u^2 + 4u \operatorname{tg} \omega - 3 = 0$$

egyenletet oldottuk meg. Ebből az az érdekesség olvasható ki, hogy u_1 és u_2 értéke közös mindazokra az AB^*C^* háromszögekre, amelyekben A és A_1 közös, továbbá B^* és C^* az eredeti BC egyenesnek A_1 -re nézve szimmetrikus pontpárja. (Vajon mi adódik ebből X, Y mértani helyéül, ha B minden megengedett helyzetét felveszi?)

Erre a „tangenses” értelmezésre támaszkodva egy kis túlzással mondhatjuk: a használt grafikus eljárást a *mi feladatunkra találták ki*.

2. A másodfokú egyenlet látott grafikus megoldását LILL-féle eljárásnak nevezik. Kiterjeszthető tetszőleges fokszámú valós együtthatós algebrai egyenlet gyökeinek közelítő keresésére, egyrészt a további együtthatóknak megfelelő törésvonalak és a P, Q, \dots törési pontok hozzácsatolásával, másrészt azzal, hogy Q -ból a PQ -ra merőlegesen haladunk tovább. 3-ad- és magasabb fokú egyenlet esetében azonban nincs olyan fogás a Thalész-kör helyett, amely biztosan átvisz K -ből N -be. Ilyenkor csak próbálgatni lehet φ (ill. P) változtatásával. A $KPQ \dots$ törött vonal újabb és újabb szerkesztése helyett egyszerűbb, gyorsabb, ha átlátszó alapra nyomtatott grafikonpapír (milliméter papír) egy darabjának megfelelő beállításával próbálkozunk.

A váz elkészítésében a 0 és negatív együtthatók megfelelő felmérése nagy gondosságot kíván.