I. megoldás. Tekintsük a feladatot megoldottnak, vagyis az X, Y pontpárra teljesül a feladat minden követelménye (1. ábra).

1984-11-371-1.eps

1. ábra

Forgassuk az ACY háromszöget az A csúcsa körül abba az $AC'Y'$ helyzetbe, amelyben C' az AB félegyenesen van, majd nyújtsuk (ill, zsugorítsuk) ugyancsak az A centrumból $\lambda = AB/AC$ arányban az $AC''Y''$ helyzetbe. Ezáltal C'' azonos lesz B-vel, egyszersmind Y'' azonos lesz X-szel. Valóban, a forgatás miatt (az egyenlőségekbe a forgási irányokat is beleértve)

$$Y''AC''\sphericalangle = Y'AC'\sphericalangle = YAC\sphericalangle = XAB\sphericalangle = XAC''\sphericalangle,$$

tehát Y'' az AX félegyenesen van, továbbá

$$\frac{AY''}{AC''} = \frac{AY'}{AC'} = \frac{AY}{AC} = \frac{AX}{AB} = \frac{AX}{AC''},$$

ennélfogva $AY'' = AX$, amint állítottuk.

Jelöljük B-nek ugyanígy elforgatott, majd a zsugorítással keletkező képét B'-vel, ill. B''-vel. Ekkor

$$B''X = B''Y'' = \lambda \cdot B'Y' = \lambda \cdot BY = \lambda \cdot CX,$$

tehát

$$B''X : CX = \lambda = AB : AC,$$

a keresett Y pontnak B''-től és C-től mért távolságainak aránya egyenlő az A-ban összefutó oldalak arányával.

Ez a B'' pont egyértelműen megszerkeszthető az A, B, C pontokból. Ismeretes másrészt, hogy azoknak a pontoknak a halmaza (mértani helye), amelyekre nézve két előírt ponttól mért távolságaik aránya állandó, kör, ha $\lambda \neq 1-$ az adott pontokhoz és arányhoz tartozó ún. *Apollóniosz*-féle kör – illetve $\lambda = 1$ esetén a két pont közti szakasz felező merőlegese.

Második mértani helyet ad X-re az AB szakasz felező merőlegese, hiszen az előírás szerint $XA = XB$.

Tüstént látjuk, hogy $AB = AC$ esetén a két mértani hely egyetlen közös pontja az AB oldal felezőpontja, ez viszont elfajult háromszöget eredményez. Ennélfogva csak a $\lambda \neq 1$ esettel foglalkozunk.

A szerkesztés lépései: 1. A B', C' forgatások után az AB' félegyenesből a B-n átmenő és $C'B'$-vel párhuzamos egyenessel kimetsszük B''-t.

2. Az Apollóniosz-körnek először a $B''C$ egyenesen levő D^*, D^{**} pontjait szerkesztjük meg. A D^*D^{**} szakasz átmérő, hiszen a mértani hely nyilvánvalóan szimmetrikus a $B''C$ tengelyre. Tetszőleges irányú párhuzamosokat húzunk C-n és B''-n át, felmérjük az elsőre a $CF = CA$ szakaszt, a másodikra B''-től mindkét irányban BA hosszát. Ezek végpontjai E^*, E^{**}. Így az FE^*, FE^{**} egyenes metszi ki D^*-ot, D^{**}-ot, és ,ekkor $D^*B'' : D^*C = D^{**}B'' : D^{**}C = BA : CA$.

Most már a D^*D^{**} átmérőjű körből AB felező merőlegese metszi ki az X és X_2 megoldásokat. Végül ezekből a rendre hozzájuk tartozó Y-t, Y_2-t A centrumú forgatva nyújtással kapjuk, szöge $BAC\sphericalangle$, aránya $1 : \lambda$.

A szerkesztést előkészítő elemzés (analízis) visszafordításával beláthatja az olvasó – ráhagyjuk –, hogy a kapott X, Y, X_2, Y_2 pontokra teljesülnek a feladat feltételei, legfőképpen a $CX = BY$ és $CX_2 = BY_2$ egyenlőségek.

Annak belátását is ráhagyjuk az olvasóra, hogy $\lambda \neq 1$ esetén mindig két megfelelő X, Y pontpár jön létre.

Ezzel teljesítettük feladatunkat.

Megjegyzések. 1. Feltűnhet a figyelmes olvasónak, hogy a kör éppen átmegy a B ponton. De tüstént beláthatja azt is, hogy ez szükségszerűség.

2. Számos dolgozat foglalkozott az ABX és ACY háromszögek hasonlóságának olyan eseteivel is, amikor nem az ugyanannyiadik csúcspárok felelnek meg egymásnak, továbbá amikor a két betűzés körüljárási iránya ellentétes. Abból csináltak problémát, hogy kifelé vagy befelé írják rá a háromszögéket az AB, AC oldalakra. Ez egyrészt megérthető „hasonló példák” alapján, másrészt éppen azt jelenti, hogy nem azt olvasták ki, hogy elsősorban *pontpárt* keresünk, hanem csak a mellékfeltételt.

Megemlítjük, hogy más megfeleltetésű hasonló háromszögpárral foglalkozott az F.2401. feladat (megoldása az 1983. novemberi számban, 119. old.), ott ABE és CAD voltak hasonlók (de nem szükségképpen egyenlő szárúak), és az az itteni jelölés szerint ABX és CAY lenne.

II. megoldás. Számítás alapján megszerkesztjük az egyenlő szárú háromszögeknek az AB és AC alapon levő szögét. Legyenek a háromszög csúcsainak koordinátái $A(0, 2d)$, $B(2e, 0)$, $C(2f, 0)$, ahol $d > 0$, $f > 0$ és $f > |e|$, ezáltal eleve $AC > AB$, kizártuk az érdektelen $AC = AB$ esetet (2. ábra). Legyenek továbbá az oldalak felezőpontjai rendre C_1, A_1, B_1, $CBA\sphericalangle = \beta$, és a forgási irányt beleértve $BAX\sphericalangle = CAY\sphericalangle = \varphi$.

1984-11-373-1.eps

2. ábra

Ekkor A_1, B_1, C_1 koordinátái $(e+f,\,0)$; (f,d), valamint (e,d), és X abszcisszája

$$e + C_1X \cdot \sin\beta = e + \frac{AB}{2}\mathrm{tg}\varphi \cdot \frac{2d}{AB} = e + d\,\mathrm{tg}\varphi = e + du,$$

ahol rövidítésül $u = \mathrm{tg}\varphi$, ezt fogjuk megszerkeszteni. Hasonlóan X ordinátája és Y koordinátái

$$d + eu, \quad Y(f + du,\, d + fu),$$

így a $BY = CX$ követelményből négyzetre emeléssel, majd rendezéssel

$$(f + du - 2e)^2 + (d + fu)^2 = (e + du - 2f)^2 + (d + eu)^2,$$

$$u^2 + \frac{8d}{e+f}u - 3 = 0, \tag{1}$$

ugyanis $e + f > 0$.

A (-3)-as állandó tagból látjuk, hogy (1)-nek két különböző valós gyöke van, ellentett előjelűek, továbbá abszolút értékre nézve a negatív gyök a nagyobb, mert u együtthatója pozitív.

Azt állítjuk, hogy a megfelelő φ szögeket megkaphatjuk a következő eljárással. Legyen az OA_1 szakasz A_1-hez közelebbi negyedelő pontja D, mérjük föl A_1-t irány és nagyság szerint A-ból: $AE = A_1D$, messe a DE átmérőjű kör az OA egyenest P_1-ben és P_2-ben, ekkor a keresett szögek $\varphi_1 = AEP_1 > 0$ és $\varphi_2 = AEP_2 < 0$ (3. ábra).

1984-11-373-2.eps

3. ábra

Igazolásul általában belátjuk a következő grafikus eljárás helyességét. Az

$$f(x) = ax^2 + bx + c = 0$$

egyenlet valós gyökeit az együtthatókból képezett $KLMN$ vázból kaphatjuk, ahol $KL \perp LM \perp MN$, és a KL, LM, MN irányított szakaszok hossza $KL = a$, $LM = b$, $MN = c$ (4. ábra). Az a, b, c tengelyeken a pozitív irány egymás után $(-90°)$-kal fordul el.

1984-11-374-1.eps

4. ábra

Ekkor a KN átmérőjű kör által LM-ből kimetszett P_1, P_2 pontokkal a gyökök

$$x_1 = \mathrm{tg}\,LKP_1\sphericalangle, \qquad x_2 = \mathrm{tg}\,LKP_2\sphericalangle,$$

és a szögek irányítása az órajárással ellentétes irányú.

Legyen P az LM egyenes tetszőleges pontja és $LKP\sphericalangle = \varphi$, továbbá messe a P-ben KP-re állított merőleges az MN egyenest Q-ban.

1984-11-374-2.eps

5. ábra

Ekkor nagyság és irány szerint (5. ábra)

$$LP = a\,\mathrm{tg}\,\varphi, \qquad PM = a\,\mathrm{tg}\,\varphi + b,$$

$$MQ = PM\,\mathrm{tg}\,\varphi, \qquad QN = MQ + MN,$$

tehát

$$QN = (a\,\mathrm{tg}\,\varphi + b)\mathrm{tg}\,\varphi + c = f(x),$$

egyenletünk bal oldalának értéke a $\mathrm{tg}\,\varphi = x$ helyen.

Mármost szerkesztésünkben a Thalész-kör folytán a P_1-ben (P_2 ben) állított merőleges éppen N-ben metszi az MN egyenest, így $QN = 0$, ami igazolja állításunkat.

Ezt az eljárást föntebb (1)-nek

$$\frac{1}{4}u^2 + \frac{2d}{e+f}u - \frac{3}{4} = 0 \tag{1'}$$

alakjára alkalmaztuk, K, L, M, N megfelelője rendre E, A, O és D. Amikor a $\dfrac{2d}{e+f}$ együttható megfelelőjének $AO = 2d$-t vettük, $e + f = 1$ lett, majd $OD =$
$= -3/4$, végül $EA = +1$. Ezzel igazoltuk, hogy a 3. ábra $AEP_i\sphericalangle = \varphi_i$ szögeire $\operatorname{tg}\varphi_i = u_i$, $(i = 1, 2)$, és ezek valóban eleget tesznek (1)-nek.

Megjegyzések. 1. Bevezetve a $BA_1A\sphericalangle = \omega$ jelölést, az

$$u^2 + 4u\operatorname{tg}\omega - 3 = 0$$

egyenletet oldottuk meg. Ebből az az érdekesség olvasható ki, hogy u_1 és u_2 értéke közös mindazokra az AB^*C^* háromszögekre, amelyekben A és A_1 közös, továbbá B^* és C^* az eredeti BC egyenesnek A_1-re nézve szimmetrikus pontpárja. (Vajon mi adódik ebből X, Y mértani helyéül, ha B minden megengedett helyzetét felveszi?)

Erre a „tangenses" értelmezésre támaszkodva egy kis túlzással mondhatjuk: a használt grafikus eljárást a *mi feladatunkra találták ki.*

2. A másodfokú egyenlet látott grafikus megoldását LILL-féle eljárásnak nevezik. Kiterjeszthető tetszőleges fokszámú valós együtthatós algebrai egyenlet gyökeinek közelítő *keresésére*, egyrészt a további együtthatóknak megfelelő törésvonalak és a P, Q, ... törési pontok hozzácsatolásával, másrészt azzal, hogy Q-ból a PQ-ra merőlegesen haladunk tovább. 3-ad- és magasabb fokú egyenlet esetében azonban nincs olyan fogás a Thalész-kör helyett, amely biztosan átvisz K-ból N-be. Ilyenkor csak próbálgatni lehet φ (ill. P) változtatásával. A $KPQ\ldots$ törött vonal újabb és újabb szerkesztése helyett egyszerűbb, gyorsabb, ha átlátszó alapra nyomtatott grafikonpapír (milliméter papír) egy darabjának megfelelő beállításával próbálkozunk.

A váz elkészítésében a 0 és negatív együtthatók megfelelő felmérése nagy gondosságot kíván.