

Jelöljük a középső, $(n + 1)$ -edik természetes számot a -val. Ekkor a vizsgálandó négyzetösszeg

$$\begin{aligned} S_n &= (a - n)^2 + (a - (n - 1))^2 + \cdots + a^2 + \cdots + (a + (n - 1))^2 + (a + n)^2 = \\ &= (2n + 1)a^2 + 2(1^2 + 2^2 + \cdots + n^2). \end{aligned}$$

Tehát

$$\begin{aligned} n = 1 \text{ esetén} \quad S_1 &= 3a^2 + 2, \\ n = 2 \text{ esetén} \quad S_2 &= 5a^2 + 10 = 5(a^2 + 2), \\ n = 3 \text{ esetén} \quad S_3 &= 7a^2 + 28 = 7(a^2 + 4), \\ n = 4 \text{ esetén} \quad S_4 &= 9a^2 + 60 = 9(a^2 + 6) + 6. \end{aligned}$$

Belátjuk, hogy $n = 1, 2, 3, 4$ esetén S_n nem lehet négyzetszám. Ehhez először azt vizsgáljuk meg, hogy a négyzet-számok 3, 5, 7 és 9-cel osztva milyen maradékot adhatnak. Ha egy m szám k -val osztva r maradékot ad, akkor m^2 és r^2 is ugyanezt a maradékot adja. Valóban, $m^2 - r^2 = (m - r)(m + r)$ osztható k -val, hiszen $k/m - r$. Ennek alapján könnyen látható, hogy a négyzetszámok 3-mal osztva 0 vagy 1; 5-tel osztva 0, 1 vagy 4; 7-tel osztva 0, 1, 2 vagy 4; 9-cel osztva 0, 1, 4 vagy 7 maradékot adhatnak.

Visszatérve az S_n számok vizsgálatára, S_1 3-mal osztva 2 maradékot ad, így nem lehet négyzetszám, S_2 5-tel osztható, de 25-tel nem, hiszen a^2 ötös maradéka nem lehet 3. Így S_2 nem lehet négyzetszám, mert a négyzetszámok prímtényezősz felbontásában minden prímszám páros kitevőjű hatványon szerepel. Hasonlóan S_3 7-tel osztható, de 49-cel nem, mert $a^2 + 4$ nem osztható 7-tel. Végül S_4 sem négyzetszám, mert kilences maradéka 6.

Megjegyzések. 1. Többen észrevették, hogy $n = 5$ esetén a helyzet változik: $18^2 + 19^2 + \cdots + 28^2 = 77^2$, tehát van 11 egymást követő természetes szám úgy, hogy négyzetösszegük négyzetszám.

2. Nehéz kérdésnek látszik, hogy általában milyen n -ekre található $(2n + 1)$ egymást követő természetes szám, melyek négyzetösszege négyzetszám.