

Jelöléseink: az α, β, γ nagyságú szög csúcsai rendre A, B, C , a szemben fekvő oldalak hossza rendre a, b, c , ezek felező merőlegese rendre f_a, f_b, f_c , az S pontnak ezekre való tükrösképe rendre S_a, S_b, S_c .

Bármelyik két tükrökép átfordítható egymásba az illető két tükrötengely metszéspontja körüli forgatással. Elég ezt pl. az S_a, S_b képpárra belátni. Felhasználjuk, hogy két nem párhuzamos tengelyen való, egymás utáni tükrözés eredménye (a síkban) az a forgatás, melynek középpontja a tengelyek közös pontja, szöge 2-szer akkora, mint amekkora elfordítás szükséges az elsőként használt tengelynek a másodikba való átviteléhez, és hogy a két elfordítás iránya egyező.

Az f_a, f_b tengelypár közös pontja az ABC háromszög köré írt kör O középpontja. S_a az f_a -n tükrözve S -be jut vissza, onnan S_b -be az f_b -n való tükrözés útján, tehát az $S_aOS_b \sphericalangle = \varphi$ forgásszög 2-szer akkora, mint az f_a -t f_b -be vivő forgásszög. Az utóbbi pedig akkora, mint az a oldalegyenest b -be átvivő forgás, hiszen a $BC = a$ egyenes merőleges f_a -ra és az $AC = b$ egyenes merőleges f_b -re. Az a, b egyenespár közös pontja a C csúcs, tehát $\varphi = 2 \cdot BCA \sphericalangle = 2\gamma$.

Mivel pedig O -n f_c is átmegy, azért ugyanígy $S_bOS_c = 2 \cdot CAB \sphericalangle = 2\alpha$ és $S_cOS_a \sphericalangle = 2 \cdot ABC \sphericalangle = 2\beta$; továbbá O képe önmaga, tehát a tükröképek rajta vannak az O körüli, OS sugarú körön. Ekkor pedig a középponti és a kerületi szögek közti összefüggés szerint $S_aS_cS_b \sphericalangle = \varphi/2 = \gamma$, ugyanígy $S_bS_aS_c \sphericalangle = \alpha$, $S_cS_bS_a \sphericalangle = \beta$. Így a szögek egyezése folytán az $S_aS_bS_c$ háromszög valóban hasonló az ABC háromszöghöz.

Mindaddig nem használtuk fel, hogy S a súlypont, ennél fogva az állítás első fele a sík tetszőleges pontjára érvényes, hacsak a háromszög létezik, vagyis S_a, S_b, S_c különböző pontok, más szóval a kiindulási S pont legfőljebb egy felező merőlegesen van rajta. Ez a feltétel bármely háromszögben csak a körülírt kör középpontjára nem teljesül.

Másképp azt is tüstént látjuk, hogy szabályos háromszög esetében az állításnak nincs tartalma; különben ekkor az (1) kifejezés értéke is 0.

A tétel általános jellegére tekintettel hozzátesszük a forgási irányok fönt idézett egyezésének jelentését. Láttuk, hogy az irányt is figyelembe véve $S_aOS_b \sphericalangle = BOA \sphericalangle$, eszerint az S_a, S_b, S_c pontok forgási iránya ellentétes irányú az ABC pontok irányával a körülírt körök közös O középpontja körül; rövidebben: az $S_aS_bS_c$ háromszög körüljárási iránya ellentétes az ABC háromszögével.

b) A tükröképek alkotta háromszög és az eredeti háromszög hasonlósági arányát mindig megadja a körjük írt körök sugarainak aránya, vagyis $OS : r$, ahol r az ABC háromszög köré írt kör sugara. Most ezt fejezzük ki a szögekkel, kihasználva, hogy S az ABC háromszög súlypontja.

Jelöljük az O -ból mint kezdőpontból az A, B, C csúcsokba mutató, r hosszúságú helyvektorokat **a**-val, **b**-vel, **c**-vel. Ekkor a súlypont helyvektora:

$$\overrightarrow{OS} = \frac{1}{3}(\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c}), \quad \text{tehát}$$

$$\frac{OS^2}{r^2} = \frac{1}{9r^2}(\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c})^2 = \frac{1}{9r^2}(\mathbf{a}^2 + \mathbf{b}^2 + \mathbf{c}^2 + 2(\mathbf{ab} + \mathbf{bc} + \mathbf{ca})).$$

Az **a, b, c** vektorok párpai által bezárt szögek fentiek szerint rendre $2\gamma, 2\alpha, 2\beta$, így

$$\mathbf{ab} = r^2 \cos 2\gamma, \quad \mathbf{bc} = r^2 \cos 2\alpha, \quad \mathbf{ca} = r^2 \cos 2\beta.$$

$$\frac{OS^2}{r^2} = \frac{1}{9r^2}(3r^2 + 2r^2(\cos 2\gamma + \cos 2\alpha + \cos 2\beta)) = \frac{1}{9}(1 - 2(-1 + \cos(180^\circ - 2\alpha) + \cos(180^\circ - 2\beta) + \cos(180^\circ - 2\gamma))).$$

A $-1 = \cos 180^\circ$ és $180^\circ = \alpha + \beta + \gamma$ helyettesítést elvégezve és a

$$\cos(x + y) + \cos(x - y) = 2 \cos x \cos y$$

azonosságot ismételten alkalmazva

$$9 \cdot \frac{OS^2}{r^2} = 1 - 2(\cos(\alpha + \beta + \gamma) + \cos(\beta + \gamma - \alpha) + \cos(\alpha + \gamma - \beta) + \cos(\alpha - \gamma + \beta)) =$$

$$= 1 - 4(\cos \alpha \cos(\beta + \gamma) + \cos \alpha \cos(\beta - \gamma)) = 1 - 8 \cos \alpha \cos \beta \cos \gamma.$$

Ezzel az állítás második részét is igazoltuk.

Eredményünkéből speciálisan az is kiadódik, hogy $1 - 8 \cos \alpha \cos \beta \cos \gamma$ nem negatív, vagyis minden háromszögben

$$\cos \alpha \cos \beta \cos \gamma \leq \frac{1}{8},$$

és egyenlőség csak $OS = 0$ esetben áll, vagyis ha a háromszög szabályos.

c) Az állítás második része sem egyedül a súlypontra érvényes, hanem az O körüli, OS sugarú kör minden pontjára, hiszen a hasonlósági arányban csak az OS távolság szerepel, még ha a kiszámításában valóban a súlypontra támaszkodtunk is.

Megjegyzés. Mivel az ABC és $S_aS_bS_c$ hasonló háromszögek körüljárása ellentétes, azért általában *nincs* a síkon olyan pont, amely körül alkalmas forgatva nyújtással egymásba transzformálhatók volnának. (Más kérdés, hogy ha pl. $AB = AC \neq BC$, akkor az $S_aS_bS_c$ - ABC háromszögpárnak van hasonlósági centruma.)