

Az a) tulajdonság szerint bármely x, y, z számra $x * (y * z) = (x * y) * z$. A b) tulajdonságból $(x * y) * z = (y * z) * x$, e kettőből pedig

$$x * (y * z) = (y * z) * x. \quad d)$$

Ez minden x, y, z -re már „majdnem” a bizonyítandó állítás (lásd a 3. megjegyzést), csak hogy eszerint a $*$ olyan elemeken cserélhető fel, amik közül legalább az egyik a $*$ művelet eredménye. (A d)-ből úgy sem következik a kívánt állítás, hogy z helyére x -et írunk, és felhasználjuk rá a)-t: $(x * y) * x = (y * x) * x$, majd egyszerűsítünk x -szel, lásd a 2. megjegyzést).

Tegyük fel, hogy az állítás nem volna igaz, azaz volna olyan x és y , amire

$$x * y \neq y * x,$$

Ekkor a c) tulajdonság felhasználásával van olyan u , hogy

$$u * (x * y) \neq u * (y * x),$$

és ekkor ismét a c) tulajdonság felhasználásával van olyan v is, hogy

$$(1) \quad v * (u * (x * y)) \neq v * (u * (y * x)),$$

ez viszont már nem lehet! Ugyanis az $(x * y)$ -t egyetlen számként kezelve, a)-ból

$$v * (u * (x * y)) = (v * u) * (x * y),$$

és például a $(v * u)$ -t egy számként kezelve, a d) tulajdonságból

$$(v * u) * (x * y) = (x * y) * (v * u).$$

Tehát (1) bal oldala egyenlő $(x * y) * (v * u)$ -val.

Most nézzük (1) jobb oldalát. Az a) tulajdonságból

$$v * (u * (y * x)) = (v * u) * (y * x),$$

a $(v * u)$ -t egy számnak tekintve, ismét az a) tulajdonságból

$$(v * u) * (y * x) = ((v * u) * y) * x.$$

Az első zárójelben álló kifejezésre a d) tulajdonságot használjuk fel:

$$((v * u) * y) * x = (y * (v * u)) * x.$$

A $(v * u)$ -t a továbbiakban egyetlen számnak tekintjük, és először a d), utána pedig az a) tulajdonságot használjuk:

$$(y * (v * u)) * x = x * (y * (v * u)) = (x * y) * (v * u).$$

Tehát az (1) egyenlőtlenség jobb oldala is egyenlő $(x * y) * (v * u)$ -val. Ellentmondásra jutottunk, tehát valóban minden x és y -ra $x * y = y * x$.

Megjegyzések. 1. Az a) tulajdonságból, amit *asszociativitásnak* mondanak, levezethető, hogy több egymás utáni $*$ művelet eredménye nem függ a zárójelezéstől, legfeljebb a tényezők sorrendjétől. Noha ez a bizonyítást leegyszerűsítette volna, a könnyebb érthetőség kedvéért megmaradtunk az a) tulajdonság közvetlen felhasználása mellett.

2. Több megoldás felhasználta, hogy ha $a * b = a * c$, akkor $b = c$ („egyszerűsítési szabály”). De ez nem következik az adott tulajdonságból! Mivel a c) nem azt állítja, hogy $x \neq y$ esetén minden z -re $z * x \neq z * y$, hanem azt, hogy ilyen z létezik, csak annyit mondhatunk, hogy ha *minden* z elemre $z * x = z * y$, akkor $x = y$. Könnyen adhatunk példát olyan $*$ műveletre, ami kielégíti az a), b), c) tulajdonságokat, és mégsem érvényes rá az egyszerűsítési szabály. Ilyen például a következő: $1 * x = x$, $x * 1 = x$, és ha $x \neq 1$, $y \neq 1$, akkor $x * y = 0$. Ennél $2 * 3 = 2 * 4 = 0$, de persze $3 \neq 4$.

3. További probléma, hogy a d) tulajdonság már „majdnem” a kívánt állítás. Csak hogy ahhoz, hogy ebből $x * p = p * x$ adódjon, be kellene látni, hogy minden p -hez létezik olyan y és z szám, hogy $p = y * z$, hiszen csak így következne $x * p = x * (y * z) = (y * z) * x = p * x$. De ez, noha a 2. megjegyzésben megadott műveletre és a szorzásra, összeadásra is igaz, általában nem teljesül. Ha például a $*$ műveletet így definiáljuk: $1 * x = x * 1 = 10^x$, és $x \neq 1$, $y \neq 1$ esetén $x * y = 0$, akkor az a), b), c) tulajdonság teljesül, de vannak számok, amik nem állnak elő $y * z$ alakban, nevezetesen a negatívok.

4. Mint látható, az összeadás és szorzás műveleteken kívül sok más is van, ami az a), b), c) tulajdonságokkal bír. Tehát nem igaz, amit sok megoldás feltételezett, hogy a $*$ művelet a $+$ vagy a $\cdot$ művelettel egyezik meg.