

1. A test vizsgálatában az ábra szerinti betűzést használjuk: az ötélű, nem szomszédos csúcsok előtt és hátul A_1 és A_2 , valamint balról és jobbról B_1 és B_2 , a négyélű csúcsok C_1 és C_2 (főnt), ill. D_1 és D_2 (lent). Valamennyi él hossza e .

1984-09-252-1.eps

A feladat szövege azt sugallja, hogy az A_1A_2 és B_1B_2 távolságok egyenlők, ezeknek a hossza $e + t$. Az ábra azt is sejteti, hogy a C_1C_2 és D_1D_2 élek C , ill. D felezőpontjait összekötő egyenes körüli 180° -os elfordítás mindegyik X_1, X_2 csúcspárt egymásba viszi át ($X = A, B, C, D$). Először ezt bizonyítjuk. (Ezt a tényt számos dolgozat csupán ösztönösen használta fel, vagy csak megemlítette.)

Írjunk e sugarú gömböt A_1 és A_2 körül. Ezeknek a B_1, C_1, C_2 és B_2 csúcsok közös pontjai, tehát rajta vannak a gömbök metszésvonalán, ami pedig egy k kör, síkidom. Más szóval e 4 csúcs S síkja a gömbök A_1A_2 centrálisának felező merőleges síkja. A kör középpontja az A_1A_2 szakasz A felezőpontja, mert A_1A_2 körül forgatva a gömböket, bármely állásban fedik önmagukat, ugyanígy k is.

Ugyanezért egy k' körön, a B_1B_2 szakasz S' felező merőleges síkjában vannak az A_1, D_1, D_2, A_2 csúcsok, és S' merőleges S -re, mert tartalmazza az S -re merőleges A_1A_2 egyenest (és viszont S a B_1B_2 -t). A k' kör középpontja a B_1B_2 szakasz B felezőpontja.

Mindegyik említett csúcsnégyes által alkotott húrnégyszög tengelyszimmetrikus trapéz, mert például az utóbbiban $A_1D_1 = A_2D_2 = e$, emiatt $D_1D_2 \parallel A_1A_2$, tehát D_1D_2 is merőleges S -re. Ha belátjuk, hogy e trapézok egybevágók, ez az e -től különböző oldaluk $A_1A_2 = B_1B_2$ egyenlőségét jelenti.

Húrtapéz meghatározásához 3 független méret szükséges; ha ezek két idomban páronként egyeznek, akkor azok egybevágók. Esetünkben a következő 3 adatpár egyenlőségét tudjuk: a 2–2 szár, a „rövidebb” párhuzamos oldalak $C_1C_2 = D_1D_2 = e$, végül a közös AB szakaszhossz. Az A, B pontok ugyanis fölcserélt szerepet játszanak a két trapézban pl. A az elsőben a körülírt kör középpontja, a másodikban a „hosszabb” párhuzamos oldal felezőpontja. Ezek szerint valóban fennáll az egybevágóság, és $A_1A_2 = B_1B_2$, ezt akartuk bizonyítani. (A „rövidebb” és „hosszabb” jelzőket csupán szemléletesség kedvéért használtuk a párhuzamos oldalak egyszerű megkülönböztetése végett.)

Azt is kaptuk, hogy S és S' a testnek szimmetriasíkjai, és mivel merőlegesen állnak, azért metszésvonaluk, CD valóban 180° -os forgástengely.

2. A továbbiakban CD -t függőlegesen tartjuk, ekkor trapézaink alapjai vízszintesek.

Trapézaink magassága

$$AD = BC = \sqrt{B_1C_1^2 - \left(\frac{B_1B_2 - C_1C_2}{2}\right)^2} = \sqrt{e^2 - \frac{t^2}{4}} = \frac{1}{2}\sqrt{4e^2 - t^2}.$$

Az A és C pontok magasságkülönbsége:

$$AC = \sqrt{A_1C^2 - A_1A^2} = \sqrt{\frac{3e^2}{4} - \left(\frac{e+t}{2}\right)^2} = \frac{1}{2}\sqrt{2e^2 - 2et - t^2}.$$

E kettő különbsége az AB magasságkülönbség.

Tekintsük azt a téglalapot, melynek egyik testátlója A_1B_2 , egy éle AB , 4 lapja függőleges, 2 lapja vízszintes. Ebből

$$\begin{aligned} A_1B_2^2 &= e^2 = AB^2 + AA_1^2 + BB_2^2 = AB^2 + 2\left(\frac{e+t}{2}\right)^2, \\ 4AB^2 &= (2BC - 2AC)^2 = (\sqrt{4e^2 - t^2} - \sqrt{2e^2 - 2et - t^2})^2 = 4e^2 - 2(e+t)^2, \\ \sqrt{(2e-t)(2e+t)} \cdot \sqrt{2e^2 - 2et - t^2} &= 2e^2 + et = e(2e+t). \end{aligned}$$

A második négyzetre emelés után mindkét oldalt oszthatjuk $(2e+t)$ -vel, és ez nem lehet 0; végül a

$$(2e-t)(2e^2 - 2et - t^2) = e^2(2e+t)$$

egyenlet rendezésével az állításbeli egyenlethez jutunk.

3. Az $f(t) = 0$ egyenlet bal oldala a $(-3e, -2e)$, a $(0, e)$ és a $(2e, 3e)$ intervallumok belsejében vált előjelet. Számunkra csak a $(0, e)$ intervallumbeli zérushelynek van jelentősége, hiszen $t > 0$, másrészt az $A_1A_2B_2$ háromszögből $e+t < 2e$, azaz $t < e$.

A gyököt intervallumfelezéssel, kis számológéppel számolva határolhatjuk be az előírt pontossággal. $e = 1$ mellett

$$f(0,289) = +0,0011, \quad f(0,29) = -0,0056,$$

tehát 2 tizedesre kerekítve $t = 0,29$ és

$$A_1A_2 = B_1B_2 = 1,29 \text{ egység.}$$

4. A test 8 csúcsa közti 28 távolság közül 18 él, azaz egységnyi, a további 10 távolság között a szimmetria alapján 3-féle hosszúság fordul elő, egyik a már látott $e + t$. A további 8 pedig 4-esével egyenlő:

$$\begin{aligned} \text{trapézátlók: } A_1D_2 = A_2D_1 = B_1C_2 = B_2C_1 &= \sqrt{AD^2 + \left(e + \frac{t}{2}\right)^2} = \\ &= \sqrt{2e^2 + et} = 1,51 \text{ egység} \end{aligned}$$

és a $C_1C_2D_1D_2$ (beírt) tetraéder e -től különböző 4 éle, a térbeli Pitagorasz-tétel alkalmazásával

$$\sqrt{(CA + AD)^2 + 2\left(\frac{e}{2}\right)^2} = 1,72 \text{ egység.}$$

Megjegyzés. A felhasznált egybevágósági állításhoz hozzátesszük: más kérdés volna a trapézok megszerkesztése. Az $(e + t)$ alap az eukleidészi szabályok szerint *nem szerkeszthető* e és $AB = BC - AC$ ismerete alapján.