

I. megoldás. Az (1) egyenletnek akkor és csak akkor van két valós gyöke, ha D diszkriminánsa pozitív. A diszkrimináns az alábbi alakba írható:

$$\begin{aligned} D &= (a_1 + a_2 + a_3 + a_4)^2 - 4a_1a_3 - 4a_2a_4 = \\ &= (a_1 + a_2)^2 + (a_1 + a_4)^2 + (a_2 + a_3)^2 + (a_3 + a_4)^2 - (a_1 + a_3)^2 - (a_2 + a_4)^2. \end{aligned}$$

Ha $a_1 + a_3$ nem negatív, akkor az $a_1 + a_3 < a_1 + a_2$ egyenlőtlenségből $(a_1 + a_3)^2 < (a_1 + a_2)^2$ következik. Ha viszont $a_1 + a_3$ negatív, akkor $a_1 + a_4$ nagyobb abszolút értékű negatív szám, tehát $(a_1 + a_3)^2 < (a_1 + a_4)^2$. Mindkét esetben fenn áll, hogy

$$(2) \quad (a_1 + a_3)^2 < (a_1 + a_2)^2 + (a_1 + a_4)^2.$$

Másrészt ha $a_2 + a_4$ nem negatív, akkor $a_2 + a_4 < a_2 + a_3$ miatt $(a_2 + a_4)^2 < (a_2 + a_3)^2$ is igaz. Ha viszont $a_2 + a_4$ negatív, akkor $a_3 + a_4$ nála kisebb, tehát nagyobb abszolút értékű, és így $(a_2 + a_4)^2 < (a_3 + a_4)^2$. Mindenesetre

$$(3) \quad (a_2 + a_4)^2 < (a_2 + a_3)^2 + (a_3 + a_4)^2.$$

Ha a (2) és (3) egyenlőtlenségeket összeadjuk, és egy oldalra rendezzük, éppen $D > 0$ -t kapunk, amit bizonyítani akartunk.

II. megoldás. A diszkrimináns az alábbi alakra is hozhatjuk:

$$\begin{aligned} D &= (a_1 + a_2 + a_3 + a_4)^2 - 4a_1a_3 - 4a_2a_4 = \\ &= (a_1 + a_4)^2 + (a_2 + a_3)^2 + 2(a_2 - a_3)(a_1 - a_4). \end{aligned}$$

A jobb oldalon az első két tag nem negatív, hiszen négyzetszám, a harmadik tag viszont két pozitív szám szorzatának kétszerese, hiszen $a_2 > a_3$ és $a_1 > a_4$ a feltételek szerint. Következésképp a harmadik tag pozitív, s így a diszkrimináns pozitív. Ebből pedig következik, hogy az egyenletnek két különböző valós gyöke van.

III. megoldás. (1) bal oldalának képe felfelé nyíló parabola. Ha sikerül bizonyítani, hogy van olyan x érték, amelyhez tartozó függvényérték negatív, akkor ebből már következik, hogy a parabola két pontban metszi az x tengelyt, tehát az egyenletnek kétvalós gyöke van.

Írjuk (1) bal oldalát a következő alakba:

$$f(x) = (x^2 - (a_1 + a_3)x + a_1a_3) + (x^2 - (a_2 + a_4)x + a_2a_4) - x^2.$$

Itt $x^2 - (a_1 + a_3)x + a_1a_3$ másodfokú függvény, amelynek két nullhelye van: $x = a_1$ és $x = a_3$; tehát az a_1 és a_3 közé eső $x = a_2$ helyen negatív értéket vesz fel. Az $x^2 - (a_2 + a_4)x + a_2a_4$ másodfokú függvény az $x = a_2$ helyen nulla (másik nullhelye az $x = a_4$ érték). Végül a $-x^2$ függvény nem pozitív az $x = a_2$ helyen. Ebből következik, hogy $f(a_2) < 0$, f képe tehát olyan felfelé nyíló parabola, amelynek $x = a_2$ értékhez tartozó pontja az x tengely alatt van, s ezt akartuk bizonyítani.

Egyenletünknek tehát van egy a_2 -nél kisebb és van egy a_2 -nél nagyobb valós gyöke.

Megjegyzés. A második megoldás mutatja, hogy elég lett volna feltenni, hogy $a_2 > a_3$ és $a_1 > a_4$. A harmadik megoldás pedig azt, hogy a feladat állítása már abból is következik, hogy $a_1 > a_2 > a_3$.