

1. Írjuk összeg alakban a két- és a három jegyű számokat – az egyes számjegyek helyi értékének figyelembevételével –, majd rendezzük át az egyenlet jobb oldalát:

$$(1) \quad 100A + 10B + C = (10A + B) \cdot C + (10B + C) \cdot A + (10C + A) \cdot B = 11(AB + BC + AC).$$

Eszerint mindkét oldal többszöröse a 11-nek. A bal oldali együtthatók csak 1 – 1 egységgel térnek el 11-nek egy-egy többszörösétől, így

$$(2) \quad 100A + 10B + C = 11(9A + B) + (A - B + C),$$

eszerint $(A - B + C)$ is osztható 11-gyel.

A kérdéses számjegyek mindegyike előfordul kezdő számjegyként, így:

$$1 \leq A, B, C \leq 9,$$

emellett különböző egész számok. Ezért egyrészt

$$A + C - B \leq 9 + 8 - 1 = 16,$$

másrészt

$$A + C - B \geq 1 + 2 - 9 = -6.$$

E két korlát között csak két szám osztható 11-gyel, nevezetesen 0 és 11, e két eshetőséget külön-külön vizsgáljuk.

2. Ha $A - B + C = 0$, helyettesítsük (1)-ben B helyére $A + C$ -t. Mindjárt 11-gyel osztva:

$$(3) \quad 10A + C = (A + C)^2 + AC,$$

vagyis

$$10A - A^2 - 3AC = A(10 - A - 3C) = C^2 - C = C(C - 1).$$

Eszerint a jobb oldal osztható A -val, írjuk így: $C(C - 1) = KA$, ahol $K \geq 0$, egész szám.

A $K = 0$ eset tüstént megoldást ad, ebből ugyanis $C = 1$, és az

$$A(7 - A) = 0$$

egyenletből $A = 7$, majd $B = 8$, és valóban teljesül, hogy

$$78 \cdot 1 + 81 \cdot 7 + 17 \cdot 8 = 781.$$

Viszont $K > 0$ mellett nincs megoldás, mert így egyrészt $C \neq 1$, $C \geq 2$ másrészt az A -val osztott egyenletből

$$10 - A - 3C = K \geq 1,$$

emiatt $C < 3$, $C \leq 2$. Márpedig $C = 2$ mellett (3) alakja $A^2 - 4A + 2 = 0$, és ennek nincs egész gyöke.

3. Ha pedig $A - B + C = 11$, ismét a $B = A + C - 11$ kiküszöböléssel, hasonló lépésekkel (1)-ből

$$10A + C - 10 = (A + C - 11)(A + C) + AC,$$

amit most így rendezünk át:

$$(4) \quad 3(7A + 4C - AC - 4) = A^2 + C^2 - 2.$$

A bal oldal miatt a jobb oldal is osztható 3-mal, vagyis 3-mal osztva $(A^2 + C^2)$ -et, maradékul 2 adódik. Mivel a $3k$, $3k + 1$, $3k - 1$ alakú számok négyzete sorra $3m$, ill. $(3m + 1)$, ill. $(3m + 1)$ alakú, azért A és C egyike sem osztható 3-mal. Ezért $A + C \leq 8 + 7 = 15$, másrészt $B \geq 1$ miatt $A + C \geq 12$. Most $A + C$ számára végigvizsgáljuk a 12, 13, 14 és 15 értékeket. Ehhez így alakítjuk (4)-et:

$$3(A - 4)(7 - C) = A^2 + C^2 - 74.$$

Az $A + C = 12$ összeg 8 + 4 és 7 + 5 alakban adódhat ki – mindkét sorrendben – és a jobb oldal értéke 6, illetve 0 lesz, egyszersmind

$$(A - 4)(7 - C) = 2, \quad \text{illetve} \quad 0.$$

Ha a jobb oldal 2, akkor $A \neq 4$, viszont $A = 8$ és $C = 4$ mellett nem teljesül az egyenlet. A másik eshetőségből $C = 7$, és $A = 5$, $B = 1$ megoldást ad, teljesül a követelmény:

$$517 = 51 \cdot 7 + 17 \cdot 5 + 75 \cdot 1.$$

A további három eset nem ad megoldást. $A + C = 14$ -ben a korlát és $A \neq C$ miatt a kisebbik számjegy 6-nak kínálkozik, de ez többszöröse a 3-nak. $A + C = 15$ csak $8 + 7$ alakban, $A + C = 13$ csak $8 + 5$ alakban jön szóba, ezekkel azonban a jobb oldal $39 = 3 \cdot 13$, illetve $15 = 3 \cdot 5$, márpedig a bal oldalban nem állhat elő 13-as, ill. 5-ös tényező.

Minden eshetőséget számba vettünk és a következő két számjegyhármaszt találtuk megfelelőnek:

$$A = 7, B = 8, C = 1 \quad \text{és} \quad A = 5, B = 1, C = 7.$$

Megjegyzések. 1. A (2) átrendezés nem csak alkalmi fogás, hanem bármilyen sokjegyű számnál használható, a 11-gyel való oszthatóság könnyítő ismertető jele. Minden páros kitevőre $10^{2k} - 1$ osztható $10^2 - 1 = 11 \cdot 9$ -cel és minden páratlan kitevőre $10^{2k+1} + 1$ osztható $(10 + 1)$ -gyel. Más szóval: 10^n -nek a 11-gyel való osztásbeli maradéka $+1$, ill. -1 aszerint, hogy n páratlan, ill. páros. Ennélfogva az $N = a_n a_{n-1} \dots a_1 a_0$ szám helyett elegendő vizsgálni a számjegyeiből képezett $J = (a_0 + a_2 + a_4 + \dots) - (a_1 + a_3 + a_5 + \dots)$ különbséget. N akkor és csak akkor osztható 11-gyel, ha J osztható vele.

2. Nem értékeltük azokat a dolgozatokat, amelyek számítógépes vizsgálat alapján kapták meg a megfelelő számjegyhármasokat (lásd a pontversenykiírást lapunk szeptemberi számában).