Mivel az $ABCD$, $A_1B_1C_1D_1$ kockából előállítandó testnek hárommal több lapja kell legyen, mint magának a kockának, ezért az átfúrást háromoldalú hasábbal végezzük. A lapok egybevágóságára vonatkozó előírásokat szem előtt tartva egyrészt a hasáb keresztmetszetéül szabályos háromszöget választunk, másrészt a hasáb tengelyét a kocka egyik testátlójára illesztjük. Ezekkel biztosítjuk, hogy az átfúrás a kockának 3–3 lapján ugyanazt a változást hozza létre.

Vetítsük a kockát (merőlegesen) az AC_1 testátlójára merőleges síkra. Mivel a kocka élei egyenlő hosszúságúak és egyenlő szögeket zárnak be a testátlóval, a kapott vetület szabályos hatszög. A kockát a kiszemelt testátló mentén átfúró hasáb vetülete pedig szabályos háromszög, amelynek súlypontja a testátló vetülete (1. ábra).

1984-04-160-1.eps

1. ábra

Ha az AC_1 testátló mint tengely körül akár a kockát, akár a hasábot 120°-kal elforgatjuk, ezek önmagukba mennek át. Ez a forgásszimmetria már biztosítja, hogy a kifúrás útján kapott test (toroid) 9 lapja az egybevágóság szempontjából legfeljebb három csoportba tartozik. Egybevágók egymással a kocka $3C_1$-ben összefutó lapjából keletkező lapok, ugyanígy az A-ban összefutó lapokból kapottak, végül a furatot határoló belső lapok is.

Ahhoz, hogy az alsó lapok a felsőkkel egybevágók legyenek, további szimmetria létesítése segít. A kocka másféle tengelyekre is szimmetrikus: két szemközti, BC és A_1D_1 élének felezőpontját összekötő YX tengely körül 180°-os elfordítás a 6 lapot páronként felcseréli. Az 1. ábrán pont-vonallal ábrázolt egyenes az egyik olyan szimmetriatengelynek a vetülete, amelyre vonatkozó tükrözés a kocka három „alsó” lapját a három „felsőbe” viszi. Ez a tengely merőleges a kocka AC_1 testátlójára, hiszen annak végpontjait egymásba viszi át, ezért merőleges a háromoldalú hasáb oldaléleire is. Ha tehát a hasábot úgy helyezzük el, hogy vetülete szimmetrikus legyen a pont-vonallal ábrázolt egyenesre, akkor az új tengely körül 180°-os forgatás a hasábot is önmagába viszi át, és a kapott toroid külső lapjai a kétféle forgási szimmetria miatt mind egybevágóak lesznek. Vegyük észre, hogy ebben a helyzetben a hasáb oldallapjai sorra párhuzamosak a kocka egy-egy átlósíkjával.

Az így átfúrt kocka képét a 2. ábra mutatja.

1984-04-160-2.eps

2. ábra

1984-04-160-3.eps

3. ábra

A 3. ábrán a keletkezett test kétféle lapját valódi méretben látjuk. A lapok jellemzői az eddig mondottak közvetlen folyományaként állapíthatók meg. a-val a kocka élhosszát, b-vel a hasáb keresztmetszetének oldalhosszát jelöljük. x azt jelöli, hogy a fúrás által az érintett kockaélekből mekkora darabot távolítottunk el. (Az ábra nem bizonyít.)

A kockát kifúró hasáb-palást keresztmetszetének méretét egy korlát alatt szabadon választhatjuk meg: $2x$-nek kisebbnek kell lennie a-nál. Tekintve, hogy $b = x\sqrt{6}$ (és nyilván $b > 0$), ezért $0 < b < a\dfrac{\sqrt{6}}{2}$ kell teljesüljön.