

1. Jelöljük az $ABCDM$ szabályos 4-oldalú gúla alapnégyzetének középpontját N -nel, az AD alapél hosszát a -val, felezőpontját F -fel, továbbá a körülírt G és a kérdéses G_1 gömb középpontját és sugarát O -val, R -rel, illetve O_1 -gyel és ϱ -val, végül az adott lapszöget α -val, az FMO szöget φ -vel, a DMO szöget δ -val.

A gúla szimmetrikus egyrészt a $DMO = S$, másrészt az $FMO = S_1$ síkra. Az utóbbi merőleges az $ADM = L$ oldallapsíkra. Az S_1 -re való tükrözés egymásba viszi át az AD csúcspárt és önmagába az egész alakzatot, tehát G_1 -nek a G -vel és az L -lel való M_1 , ill. E érintkezési pontját is. Ezért E rajta van L és S_1 metszésvonalán, az MF egyenesen, M_1 pedig G -nek M -mel átellenes pontja, továbbá az O_1 is az MO -n van.

Az O_1EM derékszögű háromszögben

$$\sin \varphi = \frac{O_1E}{MO_1} = \frac{O_1E}{MM_1 - O_1M_1} = \frac{\varrho}{2R - \varrho},$$

innen

$$(1) \quad \varrho = \frac{2R}{\frac{1}{\sin \varphi} + 1}.$$

1984-03-110-1.eps

Legyen A vetülete az MD egyenesen P , az S -re való tükrösség alapján ez egyben C -nek is vetülete, tehát $APC \sphericalangle = \alpha$. Az APC egyenlő szárú háromszögből

$$(2) \quad \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2} = \frac{PN}{AN} = \frac{PN}{DN} = \sin NDP \sphericalangle = \cos \delta.$$

(1) céljára φ és δ közt kapunk összefüggést:

$$(3) \quad \operatorname{tg} \varphi = \frac{FN}{MN} = \frac{DN}{\sqrt{2}MN} = \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{tg} \delta,$$

továbbá $2R$ és az ismert $AD = a$ alapél között a DMM_1 derékszögű háromszögből:

$$(4) \quad 2R = \frac{DM}{\cos \delta} = \frac{DN}{\cos \delta \sin \delta} = \frac{a}{\sqrt{2} \cos \delta \sin \delta}.$$

Egyelőre ott tartunk, hogy numerikus adatok mellett α -ból (2) alapján kiszámíthatjuk δ -t, ebből (3) alapján φ -t és (4) alapján $2R$ -et – az a élt is felhasználva – és ekkor (1)-ből kiszámítható a ϱ sugár.

A következőkben ϱ -t közvetlenül a -val és α -val fogjuk kifejezni. Egyfelől

$$\sin \delta = \sqrt{1 - \cos^2 \delta} = \sqrt{1 - \operatorname{ctg}^2 \frac{\alpha}{2}} = \sqrt{1 - \frac{1 + \cos \alpha}{1 - \cos \alpha}} = \sqrt{\frac{-2 \cos \alpha}{1 - \cos \alpha}},$$

így a (4)-beli nevező

$$\sqrt{\frac{2(1 + \cos \alpha)}{1 - \cos \alpha} \cdot \frac{-2 \cos \alpha}{1 - \cos \alpha}} = \frac{2\sqrt{-\cos \alpha(1 + \cos \alpha)}}{1 - \cos \alpha},$$

továbbá az (1)-beli nevező céljára

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sin \varphi} &= \sqrt{\frac{1 + \operatorname{tg}^2 \varphi}{\operatorname{tg}^2 \varphi}} = \sqrt{\frac{2}{\operatorname{tg}^2 \delta} + 1} = \sqrt{\frac{2 \cos^2 \delta}{1 - \cos^2 \delta} + 1} = \sqrt{\frac{\cos^2 \delta + 1}{1 - \cos^2 \delta}} = \\ &= \sqrt{\frac{\operatorname{ctg}^2 \frac{\alpha}{2} + 1}{1 - \operatorname{ctg}^2 \frac{\alpha}{2}}} = \sqrt{\frac{1}{-\cos \alpha}}, \end{aligned}$$

ennélfogva (1)-ből

$$\varrho = \frac{a(1 - \cos \alpha)}{2\sqrt{1 + \cos \alpha}(1 + \sqrt{-\cos \alpha})}.$$

Az adott α mindig tompaszög, tehát $-\cos \alpha > 0$, ugyanis rögzített R mellett, ha N tart M -hez, akkor α tart 180° -hoz. Ha pedig N az M_1 -hez tart, akkor α tart 90° -hoz.

2. Az előírt speciális esetben gúlánk egy szabályos oktaéder fele, N egybeesik O -val. Ekkor az oldallapok $MFN \lrcorner = \alpha/2$ szöggel hajolnak az alapsíkhoz:

$$\cos \frac{\alpha}{2} = \frac{a/2}{a\sqrt{3}/2} = \frac{1}{\sqrt{3}}, \quad \cos \alpha = 2 \cos^2 \frac{\alpha}{2} - 1 = -\frac{1}{3}$$

és

$$\varrho = \frac{a}{\sqrt{2}}(\sqrt{3} - 1) = R(\sqrt{3} - 1).$$

3. Belátjuk még, hogy ha $90^\circ < \alpha < 180^\circ$, akkor mindig létezik a G_1 gömb, illetve az OM_1 szakasz megfelelő belső O_1 pontja. Tekintsük O -nak H vetületét az MF félegyenesen, ekkor $OH = R \sin \varphi < R = OM_1$, tehát az O körüli, a gúla oldallapsíkjaival érintő gömb nem érinti G -t. Amint egy O_1^* pont halad O -tól M_1 -ig, $O_1^*H^*$ monoton és folytonosan nő, $O_1^*M_1$ pedig folytonosan csökken O -ig, tehát közben pontosan egyszer beáll az $O_1^*H^* = O_1^*M_1$ egyenlőség.