

1. Elég egyetlen ellenpélda, hogy nemet mondhatunk a kérdésre. Legyen ABC derékszögű háromszög, csúcsaiban sorra 30° -os, 90° -os, 60° -os szöggel és kapcsoljuk ehhez negyedik csúcsnak azt a D pontot, amelyre $DC \parallel AB$ és $DB \perp AC$. A négy részre vágott $ABCD$ trapéznek az AB , BC , CD oldalra támaszkodó részeiben a szögek ismét 30° , 60° , 90° -osak. Az AD -re támaszkodó háromszögben viszont nincs 60° -os szög, amely egyedül felelne meg az állításnak, ugyanis D nem tükröképe a B -nek az AC átlóra nézve

$$CD \neq CB (= \sqrt{3}CD)$$

miatt.

1984-02-066-1.eps

1. ábra

2. Van olyan négyszög, amely alapot ad a föltett kérdéshez. Legyen $ABCD$ olyan trapéz, amelyben B -nél derékszög van, $BC = AB/\sqrt{2}$ és $CD = BC/\sqrt{2}$. Ebben $\cos CAB \triangleleft = \sqrt{2/3}$, másfelől $\cos ADB \triangleleft = \frac{1}{3}$, és a $\cos 2x = 2 \cos^2 x - 1$ azonosság szerint $\cos 2 \cdot CAB \triangleleft = 1/3$.

3. Nincs másfajta konvex négyszög, amely megfelelné a feladatban szereplő feltételeknek, mint azok a derékszögű trapézok, amelyekben az átlók M metszéspontjánál derékszögek vannak, és a két alap különböző hosszú. Ha ugyanis az M -nél keletkező csúcspárok közül kettőnek a nagysága $\gamma \neq 90^\circ$, akkor a másik kettőé $180^\circ - \gamma$, és az ezeket tartalmazó háromszögekben nem lehet γ nagyságú szög, hiszen a további két szög együttvéve γ .

Ha pedig $AC \perp BD$, és azt kívánjuk, hogy az ABM , BCM és CDM háromszögek hasonlóak legyenek valamilyen körülmények szerint, akkor $ABM \triangleleft = \beta \neq 45^\circ$ jelöléssel a CBM szögre a $90^\circ - \beta$ és a β értékek jönnek szóba.

1984-02-066-2.eps

2. ábra

Az első esetben $ABC \triangleleft = 90^\circ$, a másodikban az $ABCD$ négyszög deltoid lesz, a megkülönböztetett DAM háromszög egybeeső a DCM -mel, mi pedig nem ezt keressük. Ugyanide vezetne a $\beta = 45^\circ$ föltételezés is.

Folytatva az első esetet, ismét nem lehet $BCM \triangleleft = DCM \triangleleft$, tehát $BCM \triangleleft + DCM \triangleleft = 90^\circ$, C -nél is derékszög van, és így $CD \parallel AB$, $CDM \triangleleft = \beta$.

Végül $\beta \neq 45^\circ$ miatt elég tekintenünk a $\beta > 45^\circ$ esetet. Ekkor $AM > BM > CM > DM$ és ez a négy szakasz mértani sorozatot alkot (ebben a sorrendben), melynek hányadosa $0 < \operatorname{ctg} \beta < 1$, így $ADM \triangleleft = \operatorname{ctg}^3 \beta$, ezért

$$45^\circ < \beta < ADM \triangleleft.$$

Az $ADM \triangleleft = 2(90^\circ - \beta)$ föltételezés a már látott $\operatorname{ctg} \beta = \sqrt{2}$ esetre vezet.