

Emeljünk ki a bal oldalból $\sqrt{n}$ -et:

$$(2) \quad \sqrt{n} \cdot \sqrt{\frac{1}{n} + \sqrt{\frac{n}{n^2} + \sqrt{\frac{n^2}{n^4} + \sqrt{\frac{n^3}{n^8} + \dots + \sqrt{\frac{n^n}{n^{2^n}}}}}}}$$

A bal oldal második tényezőjében szereplő $1/n, n/n^2, n^2/n^4, \dots, n^n/n^{2^n}$ értékek mindannyian egy természetes szám reciprokai, és így biztosan kisebbek 2-nél. Ez azt jelenti, hogy mindegyik gyökjel alatt 4-nél kisebb szám áll, tehát (2)-ben a bal oldal biztosan kisebb $2\sqrt{n}$ -nél. Így (1) bizonyításához elegendő belátni, hogy

$$2\sqrt{n} \leq n.$$

Ez $n \geq 4$ esetén így van, ezzel (1)-et minden 3-nál nagyobb egész számra igazoltuk. A hiányzó $n = 2$ és $n = 3$ esetekben (1)-et közvetlenül ellenőrizzük:

$$\begin{aligned} \sqrt{1 + \sqrt{2 + \sqrt{4}}} &= \sqrt{3} < 2, \\ \sqrt{1 + \sqrt{3 + \sqrt{9 + \sqrt{27}}}} &< \sqrt{1 + \sqrt{5 + \sqrt{10 + \sqrt{36}}}} = 2 < 3. \end{aligned}$$

Megjegyzés: A feladat lényegében azonos az F. 2338. feladattal (1982. május, 207. oldal).