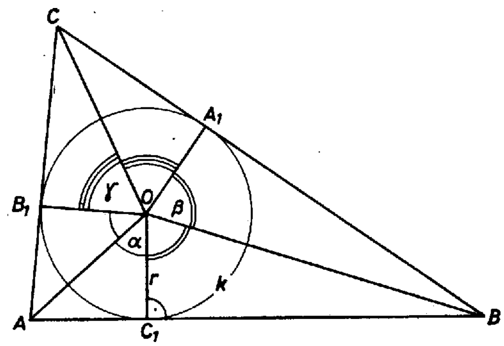
I. megoldás. Jelöljük r-rel a k kör sugarát, és legyen ABC egy k-t érintő háromszög. Belátjuk, hogy

$$OA^2 + OB^2 + OC^2 \geq 12r^2, \tag{1}$$

és egyenlőség csak akkor áll fenn, ha az ABC háromszög szabályos. Jelölje az AB, BC, CA szakaszok érintési pontját rendre C_1, A_1, B_1.



Az A_1BO és C_1BO háromszögek egybevágóak, hiszen A_1-nél, ill. C_1-nél derékszög van, $OA_1 = OC_1 = r$ és $A_1BO\sphericalangle = C_1BO\sphericalangle$. Következésképp $A_1OB\sphericalangle = C_1OB\sphericalangle$, jelöljük ezt a szöget β-val. Hasonlóan látható, hogy $A_1OC\sphericalangle = B_1OC\sphericalangle$ és $C_1OA\sphericalangle = B_1OA\sphericalangle$, jelöljük e szögeket γ-val, ill. α-val.

Az A_1OB derékszögű háromszögben $A_1O/OB = \cos\beta$, amiből $OB = A_1O/\cos\beta = r/\cos\beta$ következik. Ugyanígy $OA = r/\cos\alpha$ és $OC = r/\cos\gamma$. Ezeket (1)-be írva végül is azt kell igazolnunk, hogy

$$\frac{1}{\cos^2\alpha} + \frac{1}{\cos^2\beta} + \frac{1}{\cos^2\gamma} \geq 12, \tag{2}$$

és egyenlőség pontosan akkor áll fenn, ha $\alpha = \beta = \gamma = 60°$. Tudjuk, hogy $2\alpha + 2\beta + 2\gamma = 360°$, amiből $\alpha + \beta + \gamma = 180°$, továbbá α, β és γ hegyesszög. Be fogjuk látni, hogy ilyen feltételek mellett (2) mindig fennáll és egyenlőség pontosan akkor van, ha $\alpha = \beta = \gamma = 60°$.

A négyzetes és harmonikus közép közötti összefüggés alapján:

$$\sqrt{\frac{\frac{1}{\cos^2\alpha} + \frac{1}{\cos^2\beta} + \frac{1}{\cos^2\gamma}}{3}} \geq \frac{3}{\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma}, \tag{3}$$

és egyenlőség pontosan akkor van, ha $\cos\alpha = \cos\beta = \cos\gamma > 0$. α, β, γ nyilván lehetnek egy háromszög szögei, hiszen hegyesszögek és $\alpha + \beta + \gamma = 180°$. De ismeretes, hogy egy háromszög α, β, γ szögeire

$$\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma \leq \frac{3}{2},$$

és itt egyenlőség pontosan akkor áll, ha $\alpha = \beta = \gamma = 60°$, vagyis a háromszög szabályos. Mivel esetünkben α, β, γ hegyesszögek, tehát $0 < \cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma$, ez (3)-mal összevetve

$$\sqrt{\frac{\frac{1}{\cos^2\alpha} + \frac{1}{\cos^2\beta} + \frac{1}{\cos^2\gamma}}{3}} \geq \frac{3}{\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma} \geq 2$$

adódik, ami ekvivalens (2)-vel.

Egyenlőség akkor áll, ha egyrészt $\cos\alpha = \cos\beta = \cos\gamma > 0$, másrészt ha $\alpha = \beta = \gamma = 60°$, tehát (2)-ben is pontosan akkor áll egyenlőség, amikor $\alpha = \beta = \gamma = 60°$. Ez esetben az ABC háromszög szabályos, amit bizonyítani kellett.

II. megoldás. Jelöljük a k kör sugarát r-rel, az ABC háromszög oldalait a, b, c-vel, és legyen a szokásos módon $2s = a + b + c$. Ekkor a háromszög területe egyrészt rs, másrészt a Heron-képlet alapján $\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$, azaz

$$r^2 = \frac{(s-a)(s-b)(s-c)}{s} = \frac{(s-a)(s-b)(s-c)}{(s-a)+(s-b)+(s-c)}, \tag{4}$$

hiszen $s = (s-a) + (s-b) + (s-c)$. A k körnek és az oldalaknak érintési pontjait A_1, B_1, C_1-gyel jelölve $AC_1 = s-a$, $BA_1 = s-b$, $CB_1 = s-c$, és az AOC_1, BOA_1, COB_1 derékszögű háromszögekből a kérdéses K kifejezés

$$K = OA^2 + OB^2 + OC^2 = OC_1^2 + AC_1^2 + OA_1^2 + BA_1^2 + OB_1^2 + CB_1^2 = \\ = 3r^2 + (s-a)^2 + (s-b)^2 + (s-c)^2.$$

(4)-et felhasználva kapjuk, hogy

$$\frac{K-3r^2}{r^2} = \frac{[(s-a)^2 + (s-b)^2 + (s-c)^2] \cdot [(s-a) + (s-b) + (s-c)]}{(s-a)(s-b)(s-c)}.$$

A jobb oldali számlálóban a két tényező mindegyike három-három pozitív szám összege. A számtani és mértani közepek közötti egyenlőtlenséget a tényezőkre külön-külön alkalmazva

$$\frac{K-3r^2}{r^2} \geq \frac{3\sqrt[3]{(s-a)^2(s-b)^2(s-c)^2} \cdot 3\sqrt[3]{(s-a)(s-b)(s-c)}}{(s-a)(s-b)(s-c)} = 9,$$

vagyis $K \geq 12r^2$, és egyenlőség csak akkor áll fenn, ha $s-a = s-b = s-c$, vagyis ha $a = b = c$, a háromszög szabályos. Ezzel a feladat állítását beláttuk.

Megjegyzés. A dolgozatokban sokféle megoldástípus fordult elő, nagy részük nem is volt helyes. A hibás dolgozatok jelentős részében az a helytelen következtetés található, hogy mivel a számtani (ill. négyzetes) és mértani (ill. harmonikus) közepek közti egyenlőtlenségben egyenlőség akkor és csak akkor áll fenn, ha a számok egyenlők, ezért a számtani (ill. négyzetes) közép minimuma is ekkor van. Másik gyakori hiba, hogy a négyzetösszeget tagonként minimalizálják. Sokszor előfordult az is, hogy a k kör helyett az ABC háromszöget rögzítették és keresték azt a P pontot, amire $PA^2 + PB^2 + PC^2$ minimális.