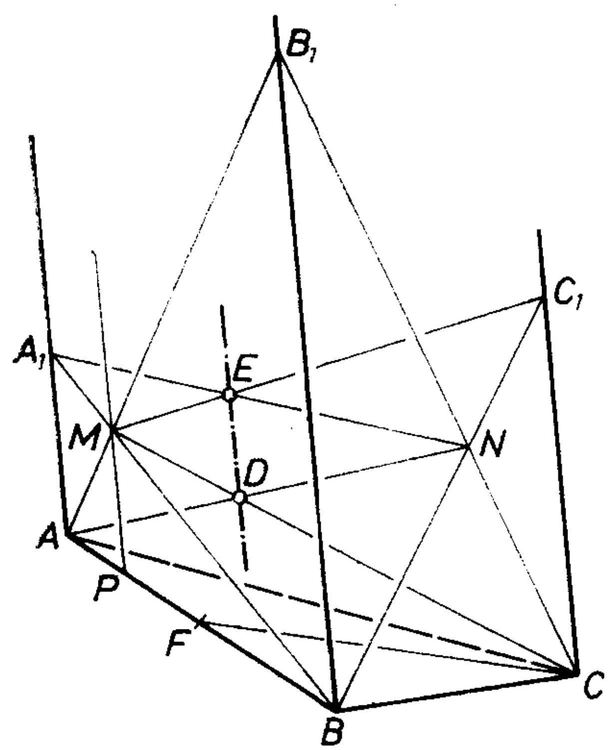
1. A feladat szövege szerint az indexezett pontok az $ABC$ síknak az egyik oldalán vannak. Általában azzal a föltevéssel kell kezdenünk a bizonyítást, hogy a 6 pont különböző.




Jelöljük $M$-mel az $ABB_1A_1$ trapéz átlóinak metszéspontját, ez az $AA_1$ és $BB_1$ oldalélek közötti pont. Ekkor $D$ – mint a $CAB_1$ és $CBA_1$ síkok közös pontja – rajta van az $MC$ egyenesen (a hasáb belsejében), továbbá $E$ – mint a $C_1AB_1$ és $C_1BA_1$ síkok közös pontja – rajta van az $MC_1$ egyenesen. Ennélfogva $D$ is, $E$ is benne van az $MCC_1$ síkban. Ezt a megállapítást ebben az alakban fogjuk felhasználni: $E$ benne van a $DCC_1$ síkban.

Írjunk a fönti meggondolásban minden $A$ betű helyére $B$-t és minden $B, C$ helyére $C$-t, ill. $A$-t, $M$ helyére $N$-et, de hagyjuk a helyükön az indexeket. Így azt kapjuk, hogy $E$ a $DAA_1$ síkban is benne van.

Az egymástól különböző $DCC_1$ és $DAA_1$ síkok tartalmazzák a $CC_1$, ill. $AA_1$ egymással párhuzamos egyeneseket (oldaléleket), ezért metszésvonaluk, a $DE$ egyenes párhuzamos az oldalélekkel. Ezt kellett bizonyítanunk.

2. A $DE$ egyenes általában nem megy át a kérdésbeli súlypontokon. Messe az $M$-en átmenő, $AA_1$-gyel párhuzamos egyenes $AB$-t $P$-ben, legyen másrészt $AB$ felezőpontja $F$. Ha $P$ és $F$ különböző pontok, akkor $F$ nincs benne az $MCC_1 = PCC_1$ síkban, tehát nincs benne az $ABC$ háromszög súlypontja sem. A $DE$ egyenesnek nincs pontja az $MCC_1$ síkon kívül, és így nem mehet át a súlyponton. $P$ nyilván akkor és csak akkor esik egybe $F$-fel, ha $AA_1 = BB_1$.

Igenlő válaszhoz szükséges a $P$ és $F$ egyezése, de nem elegendő, hasonló föltételnek kell teljesülnie a további két oldallapon is. Ha $AA_1 = BB_1 = CC_1$, akkor a $DE$ egyenes átmegy a hasáb mindkét véglapjának súlypontján.

3. Ha valamelyik oldalél két kijelölt pontja egybeesik, akkor a $DE$ egyenes máris határozatlan, egybeesik $D$ és $E$. Ha pedig két oldalélen is egybeesik az indexezett pont az indextelennel, akkor vizsgálatunk tárgytalan, $D$ és $E$ nincsenek meghatározva.

*Pelles Tamás* (Győr, Czuczor G. Bencés Gimn., III. o. t.)