

$$(1) \quad [(\sqrt{k} + \sqrt{k+1} + \dots + \sqrt{k+p})^2] = \frac{1}{2}(p+1)^2(2k+p) - 1.$$

Megoldás. Először is jegyezzük meg, hogy (1) jobb oldalán egész szám áll, hiszen vagy $p+1$ vagy $2k+p$ mindenképpen páros. Egyenlőségünk tehát a következő egyenlőtlenség-párral ekvivalens:

$$(2) \quad \frac{1}{2}(p+1)^2(2k+p) - 1 \leq (\sqrt{k} + \sqrt{k+1} + \dots + \sqrt{k+p})^2 < \frac{1}{2}(p+1)^2(2k+p).$$

Tekintsük először (2) jobb oldali egyenlőtlenségét. Gyököt vonva és $(p+1)$ -gyel osztva a

$$\frac{\sqrt{k} + \sqrt{k+1} + \dots + \sqrt{k+p}}{p+1} < \sqrt{\frac{2k+p}{2}}$$

összefüggésre jutunk, ami a $\sqrt{k}, \sqrt{k+1}, \dots, \sqrt{k+p}$ számok számtani és négyzetes közepe közti egyenlőtlenség alapján mindig teljesül. ($p \geq 1$ miatt a számok különbözők és így egyenlőség nem állhat fenn.)

Foglalkozzunk most (2) bal oldali egyenlőtlenségével. Először megmutatjuk, hogy minden $0 \leq i \leq p$ -re

$$\sqrt{k} + \sqrt{k+p} \leq \sqrt{k+i} + \sqrt{k+p-i}.$$

Valóban, négyzetre emelve és rendezve

$$\sqrt{k+(k+p)} \leq \sqrt{(k+i)+(k+p-i)} = \sqrt{k(k+p)+i(p-i)}$$

ami $i(p-i) \geq 0$ miatt teljesül. Ennek alapján

$$(3) \quad \left(\frac{p+1}{2}(\sqrt{k} + \sqrt{k+p}) \right)^2 < (\sqrt{k} + \sqrt{k+1} + \dots + \sqrt{k+p})^2.$$

Azt fogjuk megmutatni, hogy létezik olyan k_0 , hogy minden $k > k_0$ -ra

$$(4) \quad \frac{1}{2}(p+1)^2(2k+p) - 1 \leq \left(\frac{p+1}{2}(\sqrt{k} + \sqrt{k+p}) \right)^2.$$

Ebből (3) alapján (2) bal oldali egyenlőtlensége azonnal adódik. (4) mindkét oldalát $(p+1)^2/2$ -vel osztva, a négyzetre emelést elvégezve és rendezve

$$\frac{2}{(p+1)^2} \geq k + \frac{p}{2} - \sqrt{k(k+p)} = \frac{1}{4} \frac{p^2}{k + \frac{p}{2} + \sqrt{k(k+p)}}.$$

Ez elég nagy k -ra teljesül, hiszen a jobb oldal k növekedésével 0-hoz tart.

Így a feladat állítását igazoltuk.