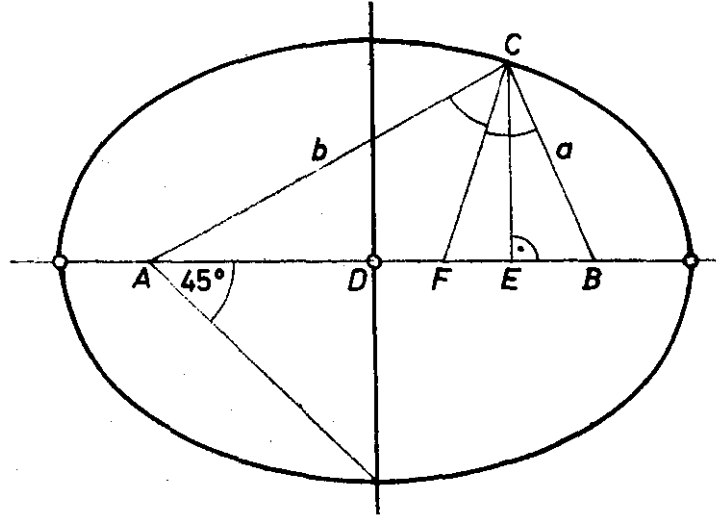


Legyen a C -ből induló belső szögfelező és AB metszéspontja F .



Ekkor a szokásos jelölésekkel $AF + FB = c$, és a szögfelezőre vonatkozó ismert tétel alapján:

$$AF : FB = AC : CB = b : a.$$

Ezekből $AF = c \cdot b / (a + b)$.

Az általánosság korlátozása nélkül feltehetjük, hogy $a \leq b$, így $DF = AF - \frac{c}{2} = c \frac{b-a}{2(a+b)}$. A cosinustétel alapján:

$$\cos \angle ABC = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}, \text{ ezért } DE = \frac{c}{2} - a \cdot \cos \angle ABC = \frac{b^2 - a^2}{2c}.$$

Azon C pontok mértani helyét keressük, melyekre

$$\frac{DE}{2} = DF,$$

vagyis

$$\frac{b^2 - a^2}{4c} = c \frac{b-a}{2a+b},$$

Átrendezve:

$$(b-a)[(2a+b)^2 - 2c^2] = 0.$$

Ez akkor és csak akkor teljesül, ha vagy $a = b$, vagy $a + b = \sqrt{2}c$.

Az első esetben a háromszög egyenlő szárú, D és E egybeesik. A mértani hely az AB szakasz felező merőlegese, kivéve a D pontot, hiszen ha C az AB egyenesre esik, nincs háromszög, nincs szögfelező.

A második egyenlet az $a \leq b$ feltétellel együtt $\sqrt{2}c$ nagytengelyű, A, B fókuszú ellipszisnek B -hez közelebbi felét adja.

Megengedve az $a > b$ esetet is, ugyanehhez az összefüggéshez jutunk, és megkapjuk az ellipszis másik ívét.

A gondolatmenetet megfordítva belátható, hogy az ellipszis minden pontja, az AB -vel közös két pontját kivéve, hozzátartozik a mértani helyhez.

Simon Péter (Bp., József Attila Gimn., III. o. t.)