

$$\begin{array}{ll}
(1) & x + y + z = 5 \\
(2) & x^2 + y^2 + z^2 = 9 \\
(3) & xy + u + vx + vy = 0 \\
(4) & yz + u + vy + vz = 0 \\
(5) & zx + u + vz + vx = 0.
\end{array}$$

Megoldás. Vonjuk ki (3)-ból a (4)-et, ill. (5)-öt. Rendezés után az $(y + v)(x - z) = 0$, illetve az $(x + v)(y - z) = 0$ összefüggéseket kapjuk. Ezekből arra következtethetünk, hogy x, y, z közül legalább kettő egyenlő. Ha ugyanis $x \neq z$, és $y \neq z$ volna, akkor utóbbi két egyenletünkből $y + v = 0$, illetve $x + v = 0$ adódik, s így $x = y = -v$.

Legyen például $x = y$. Ekkor (1) és (2)-ből

$$2x + z = 5, \quad 2x^2 + z^2 = 9.$$

Ezt megoldva, az $x_1 = y_1 = 2, z_1 = 1$ és az $x_2 = y_2 = 4/3, z_2 = 7/3$ megoldásokat kapjuk. Az $(y + v)(x - z) = 0$ összefüggésből $v_1 = -2, v_2 = -4/3$, végül u értéke például (3)-ból könnyen számolható: $u_1 = 4, u_2 = 16/9$. Természetesen $x = y$ helyett $x = z$ vagy $y = z$ is lehetséges, amiből négy további megoldás adódik.

Összefoglalva, az egyenletrendszernek hat megoldása van:

$x_1 = 2$	$y_1 = 2$	$z_1 = 1$	$u_1 = 4$	$v_1 = -2$
$x_2 = 4/3$	$y_2 = 4/3$	$z_2 = 7/3$	$u_2 = 16/9$	$v_2 = -4/3$
$x_3 = 2$	$y_3 = 1$	$z_3 = 2$	$u_3 = 4$	$v_3 = -2$
$x_4 = 4/3$	$y_4 = 7/3$	$z_4 = 4/3$	$u_4 = 16/9$	$v_4 = -4/3$
$x_5 = 1$	$y_5 = 2$	$z_5 = 2$	$u_5 = 4$	$v_5 = -2$
$x_6 = 7/3$	$y_6 = 4/3$	$z_6 = 4/3$	$u_6 = 16/9$	$v_6 = -4/3$