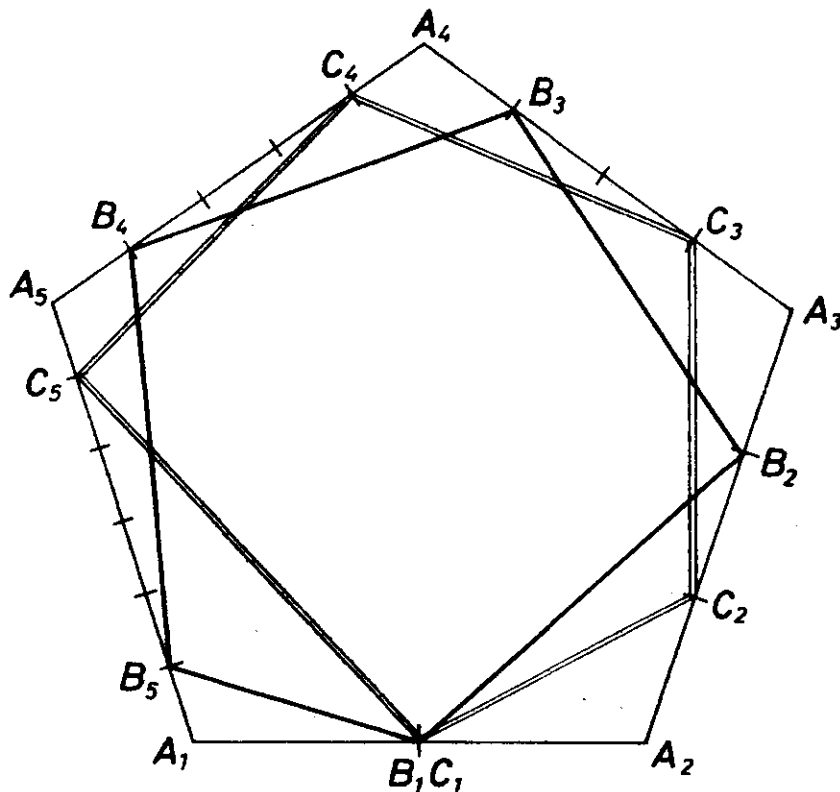


A feladat állítása egyenértékű azzal, hogy a $B_1B_2 \dots B_n, C_1C_2 \dots C_n$ sokszögeket az $A_1A_2 \dots A_n$ sokszöggé kiegészítő $B_1A_2B_2, B_2A_3B_3, \dots, B_nA_1B_1$; illetve $C_1A_2C_2, C_2A_3C_3, \dots, C_nA_1C_1$ háromszögek területének összege egyenlő.



Legyen az $A_1A_2 \dots A_n$ konvex szabályos sokszög szöge α , és oldala egységnyi. Ekkor a feladat szerint $i = 1, 2, \dots, n-1$ esetében

$$B_iA_{i+1} = \frac{1}{i+1}, \quad A_{i+1}B_{i+1} = (i+1) \cdot \frac{1}{i+2}, \quad C_iA_{i+1} = \frac{i}{i+2}, \quad A_{i+1}C_{i+1} = \frac{1}{i+2}.$$

A $B_iA_{i+1}B_{i+1}$, ill. a $C_iA_{i+1}C_{i+1}$ háromszög területe:

$$T(B_iA_{i+1}B_{i+1}) = \frac{1}{2} B_iA_{i+1} \cdot A_{i+1}B_{i+1} \cdot \sin \alpha = \frac{\sin \alpha}{2} \cdot \frac{i+1}{(i+1)(i+2)},$$

$$T(C_iA_{i+1}C_{i+1}) = \frac{1}{2} C_iA_{i+1} \cdot A_{i+1}C_{i+1} \cdot \sin \alpha = \frac{\sin \alpha}{2} \cdot \frac{i}{(i+1)(i+2)}.$$

$i = n$ esetén pedig hasonlóan

$$B_nA_{n+1} = B_nA_1 = \frac{1}{n+1}, \quad A_1B_1 = A_1C_1 = \frac{1}{2} \quad \text{és} \quad C_nA_{n+1} = \frac{n}{n+1}$$

alapján

$$T(B_nA_1B_1) = \frac{\sin \alpha}{2} \cdot \frac{1}{2(n+1)}, \quad T(C_nA_1C_1) = \frac{\sin \alpha}{2} \cdot \frac{n}{2(n+1)}.$$

Így a következőt kell bizonyítanunk:

$$\sum_{i=1}^{n-1} \frac{i+1}{(i+1)(i+2)} + \frac{1}{2(n+1)} = \sum_{i=1}^{n-1} \frac{i}{(i+1)(i+2)} + \frac{n}{2(n+1)}.$$

A bal és a jobb oldal különbsége:

$$\sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{(i+1)(i+2)} + \frac{1-n}{2(n+1)} = \sum_{i=1}^{n-1} \left(\frac{1}{i+1} - \frac{1}{i+2} \right) + \frac{1-n}{2(n+1)} = \frac{1}{2} - \frac{1}{n+1} + \frac{1-n}{2(n+1)}.$$

Ez pedig 0. Ezzel az állítást igazoltuk.