(1) $$cos^2(A-B)+cos^2(B-C)+cos^2(C-A) \geqq 24\, cos\, A\, cos\, B\, cos\, C.$$

Megoldás. Elég belátni, hogy

(2) $$\cos^2(A-B) \ge 8 \cos A \cos B \cos C,$$

hiszen ebből A, B, C szimmetrikus szerepe alapján a betűk ciklikus permutációjával

$$\cos^2(B-C) \ge 8 \cos A \cos B \cos C$$
$$\cos^2(C-A) \ge 8 \cos A \cos B \cos C$$

is következik, és ezek összege éppen a kívánt állítást adja.

(2) bizonyításához a jobb oldalon helyettesítjük a feladat feltételéből adódó $\cos C = -\cos(A+B)$-t, így a (2)-vel ekvivalens

$$\cos^2(A-B) \ge -8 \cos A \cos B \cos(A+B)$$

egyenlőtlenségre jutunk. A $\cos(A+B)$, valamint $\cos(A-B)$ felbontásával, a négyzetre emelés és a lehetséges összevonások elvégzésével egyenlőtlenségünk

$$9 \cos^2 A \cos^2 B - 6 \cos A \cos B \sin A \sin B + \sin^2 B \ge 0$$

alakra hozható. Ez pedig A és B tetszőleges értékénél teljesül, mert a bal oldal $(3 \cos A \cos B - \sin A \sin B)$ négyzete.

Bán Rita (Szeged, Radnóti M. Gimn., II. o. t.)