

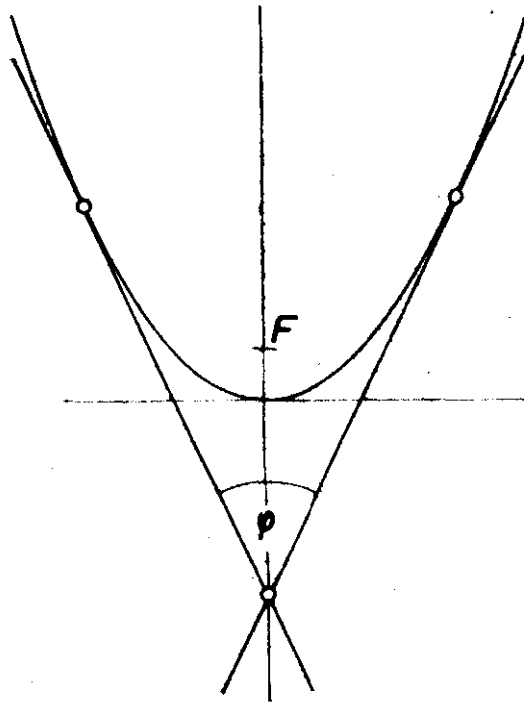
I. megoldás. Vizsgáljuk meg, hogy mi lehet a közös része egy egyenesnek és egy parabola tartománynak. Vegyük föl a koordináta-rendszert úgy, hogy a parabola egyenlete $y = x^2$ legyen, ekkor az egyenes egyenlete vagy $y = ax + b$, vagy $x = c$ alakú (a, b, c tetszőleges). Az $x = c$ egyenletű egyenesek párhuzamosak a parabola tengelyével, ezek a parabola tartományt félegyenesben metszik.

Az $y = ax + b$ egyenes és a parabola tartomány közös részének koordinátái kielégítik az $x^2 \leq ax + b$ és $y = ax + b$ feltételeket. Látható, hogy ez egy szakaszra teljesül, vagy nincs közös rész.

Tegyük föl most, hogy adott a síkon véges sok parabola tartomány, és válasszunk egy olyan egyenest, mely nem párhuzamos egyik parabola tengelyével sem. Ebből az egyenesből a parabolák legfeljebb véges sok szakaszt fednek le, tehát még ezt az egyenest sem fedik le teljesen a parabola tartományok, ennél fogva az egész síkot sem.

II. megoldás. Két segédtevélt használunk fel,

1. *segédtevélt.* Bármely parabola tartomány lefedhető tetszőlegesen kicsi pozitív φ szögű tartománnyal.

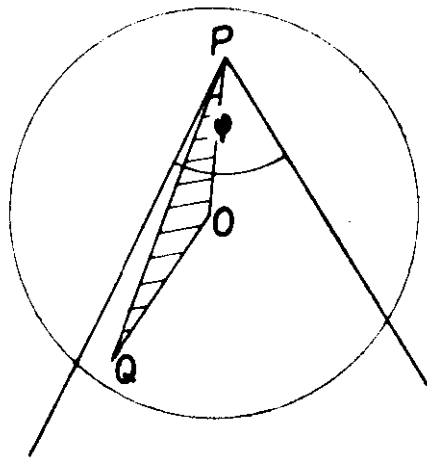


Válasszuk úgy a derékszögű koordináta-rendszer tengelyeit, hogy a parabola egyenlete $y = x^2/2p$ legyen, ahol p a fókusz és a vezéregyenes távolsága. Az $(x_0, x_0^2/2p)$ ponthoz húzott érintő meredeksége megegyezik az $y = x^2/2p$ függvény deriváltjának az x_0 helyen vett értékével, azaz x_0/p -vel. Ha $|x_0|$ nő, akkor a meredekség abszolút értéke is minden határon túl nő. Így az érintőnek az y tengellyel bezárt szöge tetszőlegesen kicsire csökkenthető. A $(-x_0, x_0^2/2p)$ és $(x_0, x_0^2/2p)$ pontokhoz húzott érintők által meghatározott szögtartomány lefedi a parabola tartományt. A két határoló félegyenes 2-szer akkora szöget zár be egymással, mint amekkora szöget az y tengely és az $(x_0, x_0^2/2p)$ ponthoz húzott érintő közrezár, és ez a szög is tetszőlegesen kicsire csökkenthető.

Vegyük fel a síkon n db parabola tartományt, s fedjük le e tartományok mindegyikét egy, közös φ szögű tartománnyal, ahol $0 < \varphi < \pi/2n$. Ezzel többet fedünk le a síkból, mint a parabola tartományok.

Jelöljük a szögtartományok csúcsait $P_1, P_2, \dots, P_n$ -nel és r -rel a P_1P_i ; távolságok legnagyobbikát, $i = 2, 3, \dots, n$. Mivel véges sok $(n-1)$ db szakasz maximálisát vettük, így r is véges. A $P_1 = O$ középpontú, r sugarú körlap tartalmazza $P_1, P_2, \dots, P_n$ mindegyikét. Látni fogjuk, hogy a szögtartományok már ezt a körlapot sem fedik le.

2. *segédtevélt.* Ha egy hegyesszög-tartomány P csúcsa egy r sugarú kör határán vagy a belsejében van, akkor a szögtartomány legfeljebb $2r^2 \cdot \varphi$ területű részét fedi le a körnek, ahol φ a szögtartomány mértéke radiánban.



Legyen ugyanis Q a szögtartomány és a körlap tetszőleges közös pontja. Mivel P és Q az O középpontú, r sugarú körlap pontjai, így $OP \leq r$ és $OQ \leq r$. A háromszög – egyenlőtlenség szerint $PQ \leq OP + OQ \leq 2r$, tehát Q benne van a P középpontú $2r$ sugarú, φ szögű körcíkben. Ez a körcík tartalmazza tehát a szögtartomány és a kör közös részét, s a közös rész területe emiatt legfeljebb akkora, mint a körcík területe, ami $T = 2r^2\varphi$.

Ezek szerint a $P_1, P_2, \dots, P_n$ csúcsú szögtartományok bármelyike legfeljebb $T = 2r^2\varphi$ területű részt fed le a $P_1 = O$ középpontú r sugarú körből. Az n db szögtartomány legfeljebb $n \cdot T$ területet fed le a körlapból, az pedig φ megválasztása folytán kisebb, mint $r^2\pi$, a kör területe, vagyis a szögtartományok együtt valóban nem fedik le a kört. Így nem fedik le teljesen a síkot sem.

Hetyei Gábor (Pécs, Leöwey K. Gimn., IV. o. t.)