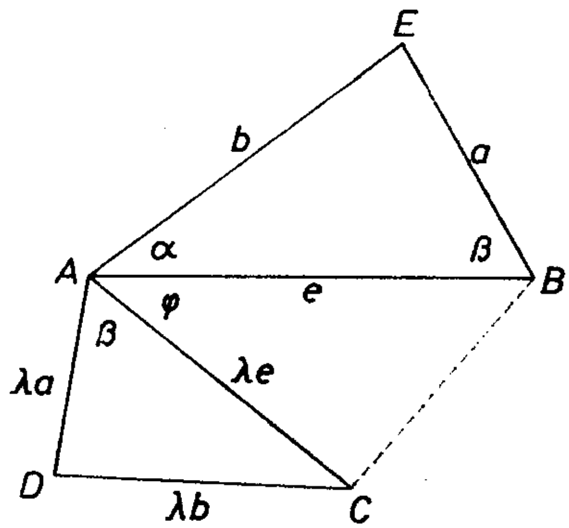
Legyenek az ABE háromszög oldalai rendre a, b és e, ekkor az ABE és CAD háromszögek hasonlósága alapján

$$AD = \lambda a, \qquad DC = \lambda b, \qquad AC = \lambda e$$

valamilyen pozitív λ-val. Az AB és CA oldalak nagyságviszonyát λ dönti el: ha $\lambda < 1$, akkor az AB oldal a nagyobb; ha $\lambda = 1$, akkor $AB = CA$; végül ha $\lambda > 1$, akkor a CA oldal a nagyobb. Így ahhoz, hogy a kérdésre választ adhassunk, elegendő megvizsgálni, λ milyen értékei egyeztethetők össze a $BD = CE$ feltétellel.



Jelöljük a BAC szöget φ-vel, ekkor a cosinustétel alapján

$$BD^2 = e^2 + (\lambda a)^2 - 2\lambda ae\cos(\beta+\varphi),$$
$$CE^2 = b^2 + (\lambda e)^2 - 2\lambda be\cos(\alpha+\varphi).$$

Innen $BD = CE$ akkor és csak akkor áll, ha (mindjárt átrendezve és az addíciós képleteket felhasználva)

(1)
$$\lambda^2(a^2-e^2) - 2\lambda\cos\varphi(ae\cos\beta - be\cos\alpha) + (e^2-b^2) = \\ = -2\lambda e\sin\varphi(a\sin\beta - b\sin\alpha).$$

A jobb oldalon az ABE háromszögre vonatkozó sinustétel alapján 0 áll. A cosinustételből könnyen adódó

$$ae\cos\beta - be\cos\alpha = a^2 - b^2$$

összefüggést (1)-be írva adódik, hogy $BD = CE$ akkor és csak akkor áll fenn, ha

(2)
$$\lambda^2(a^2-e^2) - 2\lambda\cos\varphi(a^2-b^2) + (e^2-b^2) = 0.$$

Innen azonnal leolvasható, hogy az $a = b = c$ esetben – azaz ha az ABE, és ezzel együtt a CAD háromszög is szabályos – (2) azonosan teljesül, vagyis a $BD = CE$ egyenlőség minden λ, és φ mellett fennáll. Így általában az AB és CA oldalak nagyságviszonyáról – egyedül a $BD = CE$ alapján – semmit sem mondhatunk.

Ha $a = b \neq e$, azaz ABE olyan egyenlő szárú nem–szabályos háromszög, melynek alapja AB, akkor (2) szerint $BD = CE$ akkor és csak akkor, ha $\lambda^2 = 1$. Ha tehát ABE ilyen háromszög, akkor $BD = CE$ esetén az AB és AC oldal egyforma hosszúságú.

Végül ha $a \neq b$, akkor (2)-t a következő alakra hozhatjuk:

(3)
$$2\cos\varphi = \lambda\frac{a^2-e^2}{a^2-b^2} + \frac{1}{\lambda}\cdot\frac{e^2-b^2}{a^2-b^2}.$$

Ez teljesül, ha $\lambda = 1$ és $\varphi = 60^\circ$, ekkor (3) mindkét oldalának értéke 1. Mivel (3) jobb oldala $\lambda > 0$-ra λ-nak folytonos függvénye, található olyan (a-tól, b-től és e-től függő) $\varepsilon > 0$, hogy $1-\varepsilon < \lambda < 1+\varepsilon$ esetén (3) jobb oldalának értéke a $(2\cos 70^\circ,\ 2\cos 50^\circ)$ intervallumba esik. Következésképp minden, az $(1-\varepsilon,\ 1+\varepsilon)$ intervallumba eső λ-hoz található olyan $50^\circ < \varphi < 70^\circ$, mellyel (3) teljesül, azaz amikor $BD = CE$ fennáll. Tehát $BD = CE$ mellett a $\lambda < 1$, $\lambda = 1$ és a $\lambda > 1$ esetek mindegyike felléphet: az AB és AC oldalak nagyságviszonyáról semmit nem mondhatunk.

Összefoglalva: ha az ABE háromszögben $AE = EB \neq AB$, akkor $BD = CE$ csak úgy állhat fenn, ha az AB és CA oldalak egyenlő hosszúak. Minden más esetben $BD = CE$ fennállhat úgy is, ha $AB < CA$, úgy is, ha $AB = CA$, és úgy is, ha $AB > CA$.