

a) Legyenek a kihúzott számok $a, a + d, a + 2d, a + 3d$ és $a + 4d$. Mivel egy számtani sorozatot kezdőtagja és differenciája egyértelműen meghatározza, a fenti alakú számötösök egyértelműen megfeleltethetők az olyan pozitív egészekből álló (a, d) pároknak, ahol $a + 4d \leq 90$. Feladatunk tehát így fogalmazható át: hány olyan pozitív egészekből álló (a, d) számpár létezik, melyre $a + 4d \leq 90$?

Rögzítsük d értékét! $a + 4d \leq 90$ miatt $a \leq 90 - 4d$, tehát a lehetséges értékei $1, 2, 3, \dots, 90 - 4d$. (Ha $d \geq 23$, akkor nincs megfelelő (a, d) pár.) Eszerint a feladat feltételeit kielégítő (a, d) rendezett párok száma

$$\sum_{d=1}^{22} (90 - 4d) = \frac{22 \cdot (90 - 4 \cdot 1 + 90 - 4 \cdot 22)}{2} = 968.$$

b) Ha a kihúzott számok mértani sorozatot alkotnak, jelöljük a legkisebbet a -val, és a sorozat hányadosát q -val. Ekkor a kihúzott számok a, aq, aq^2, aq^3, aq^4 , ahol $q > 1$ és q racionális, hiszen előáll két egész szám (például aq és a) hányadosaként. Legyen

$$q = \frac{p}{r}$$

ahol p és r relatív prím pozitív egészek. r értéke szerint három esetet különböztetünk meg:

1. $r = 1$, azaz q egész. Ekkor $a \cdot q^4 \leq 90$ miatt $q^4 \leq 90$, tehát $q < 4$. $q = 2$ esetén a lehetséges értékei $1, 2, 3, 4, 5$, hiszen $a \geq 6$ -ra $a \cdot q^4 \leq 6 \cdot 2^4 = 96$. Az öt szóba jövő számötös $1, 2, 4, 8, 16$; $2, 4, 8, 16, 32$; $3, 6, 12, 24, 48$; $4, 8, 16, 32, 64$ és $5, 10, 20, 40, 80$, ezek valóban megoldások is. Ha $q = 3$, akkor csak $a = 1$ és az $1, 3, 9, 27, 81$ számötös lehetséges, mert $a \geq 2$ -re $a \cdot q^4 \geq 2 \cdot 2^4 = 162$.

2. $r = 2$. Ekkor, mivel p és r relatív prímek, és $aq^4 = a \frac{p^4}{2^4}$ egész, így a többszöröse 16-nak. Másfelől $p > r$ miatt $p \geq 3$, $aq^4 \geq 16 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^4 = 81$. Az $a = 16$, $p = 3$ esetben a $16, 24, 36, 54, 81$ megoldást kapjuk, ha pedig $a > 16$ vagy $p > 3$, akkor

$$aq^4 \geq 32 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^4 = 162, \text{ ill. } aq^4 \geq 16 \cdot \left(\frac{4}{2}\right)^4 = 256,$$

így nincs több megoldás.

3. $r \geq 3$. Ekkor, az előzőekhez hasonlóan $aq^4 = a \frac{p^4}{r^4}$ egész voltából $a \geq r^4$ következik. Másfelől $p > r$ miatt $p \geq r + 1$, és így

$$aq^4 \geq r^4 \cdot \left(\frac{r+1}{r}\right)^4 = (r+1)^4 \geq 4^4 = 256,$$

tehát ebben az esetben nincs a feladat feltételeit kielégítő számötös.

Így összesen 7 megoldást kaptunk.

Hetyei Gábor (Pécs, Leöwey K. Gimn., IV. o. t.)