$$a^2x^2 + 2abxy + (b^2+1)y^2 < b^2+1 \tag{1}$$

Megoldás. Tekintsük (1) két oldalának különbségét y függvényeként, azaz legyen

$$f(y) = (b^2+1)y^2 + 2abxy + a^2x^2 - (b^2+1).$$

Az $f(y)$ grafikonja egy felfelé nyíló parabola, hiszen a másodfokú tag együtthatója, b^2+1, pozitív. Az (1) feltétel azt jelenti, hogy az $f(y)$ függvény negatív értéket is felvesz, így $f(y)$-nak két különböző zérushelye van. Ez pedig azt jelenti, hogy az $f(y) = 0$ másodfokú egyenlet diszkriminánsa pozitív:

$$D = (2abx)^2 - 4(b^2+1)(a^2x^2+b^2-1) = 4\big((b^2+1)^2 - a^2x^2\big) > 0.$$

Az $a > b^2 \geqq 0$ feltétel miatt $a \neq 0$, és így a $D > 0$ ekvivalens azzal, hogy

$$\left|\frac{b^2+1}{a}\right| > |x|.$$

Mivel a és b egész, azért $a > b^2$ egyúttal azt is adja, hogy $a \geqq b^2+1$. Így azt kapjuk, hogy $1 > |x|$, ami alapján – mivel x is egész – csak $x = 0$ lehetséges. Ha viszont $x = 0$, akkor (1)-ből $(b^2+1)y^2 < b^2+1$, ahonnan $y^2 < 1$, azaz $y = 0$. Ezzel a feladat állítását igazoltuk.

Megjegyzés. Sokan azért nem kapták meg a maximális pontszámot, mert azt állították, hogy (1) bal oldalát az $a > b^2$ feltétel miatt csökkentjük, ha a helyére b^2-et írunk. Ez azonban nem mindig igaz, például ha még $abxy < 0$ is teljesül, akkor $abxy < b^3xy$.