

$$(1) \quad a^2x^2 + 2abxy + (b^2 + 1)y^2 < b^2 + 1$$

**Megoldás.** Tekintsük (1) két oldalának különbségét  $y$  függvényeként, azaz legyen

$$f(y) = (b^2 + 1)y^2 + 2abxy + a^2x^2 - (b^2 + 1).$$

Az  $f(y)$  grafikonja egy felfelé nyíló parabola, hiszen a másodfokú tag együtthatója,  $b^2 + 1$ , pozitív. Az (1) feltétel azt jelenti, hogy az  $f(y)$  függvény negatív értéket is felvesz, így  $f(y)$ -nak két különböző zérushelye van. Ez pedig azt jelenti, hogy az  $f(y) = 0$  másodfokú egyenlet diszkriminánsa pozitív:

$$D = (2abx)^2 - 4(b^2 + 1)(a^2x^2 + b^2 - 1) = 4((b^2 + 1)^2 - a^2x^2) > 0.$$

Az  $a > b^2 \geq 0$  feltétel miatt  $a \neq 0$ , és így a  $D > 0$  ekvivalens azzal, hogy

$$\left| \frac{b^2 + 1}{a} \right| > |x|.$$

Mivel  $a$  és  $b$  egész, azért  $a > b^2$  egyúttal azt is adja, hogy  $a \geq b^2 + 1$ . Így azt kapjuk, hogy  $1 > |x|$ , ami alapján – mivel  $x$  is egész – csak  $x = 0$  lehetséges. Ha viszont  $x = 0$ , akkor (1)-ből  $(b^2 + 1)y^2 < b^2 + 1$ , ahonnan  $y^2 < 1$ , azaz  $y = 0$ . Ezzel a feladat állítását igazoltuk.

*Megjegyzés.* Sokan azért nem kapták meg a maximális pontszámot, mert azt állították, hogy (1) bal oldalát az  $a > b^2$  feltétel miatt csökkentjük, ha  $a$  helyére  $b^2$ -et írunk. Ez azonban nem mindig igaz, például ha még  $abxy < 0$  is teljesül, akkor  $abxy < b^3xy$ .