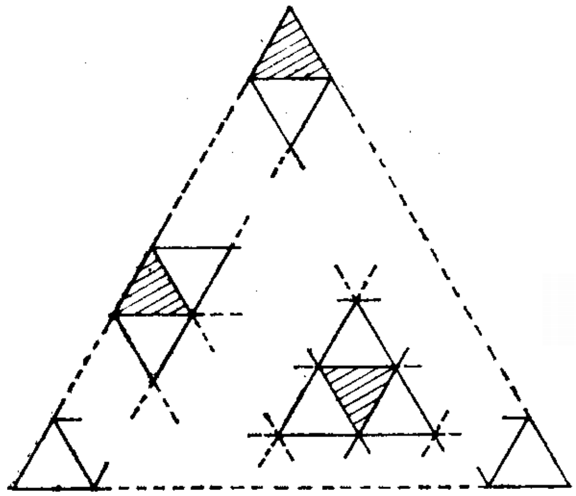
I. megoldás. A feladat feltételeinek nyilvánvalóan megfelel a csupa piros lemezekből összeillesztett háromszög. Ebben ugyanis egyetlen piros háromszög oldala sem csatlakozik kék háromszög oldalához (a nulla is páros szám!), kék háromszögek hiányában pedig a rájuk vonatkozó további előírást sem sértettük meg. Tehát az összeillesztés lehetséges a kívánt módon.

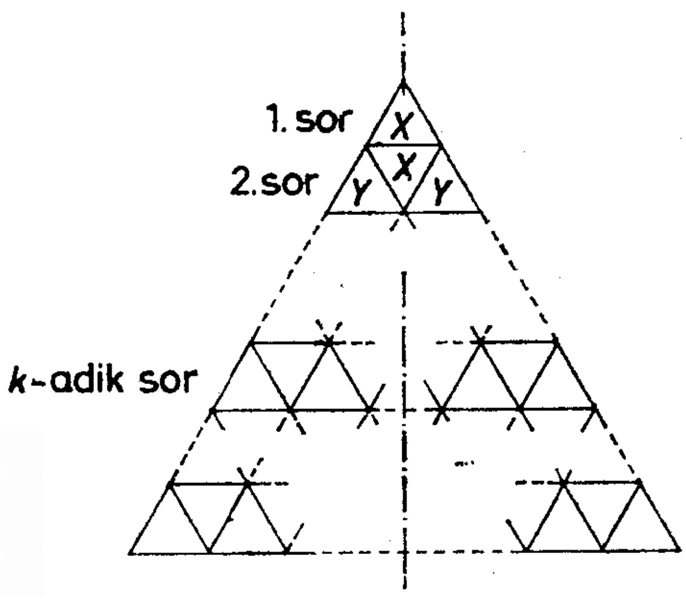
Azt kell még bebizonyítanunk, hogy a feladat feltételeinek megfelelően összeillesztett nagy háromszög csúcsaiban levő lemezek mindig egyező színűek. Ehhez elegendő belátnunk, hogy minden megfelelően összeállított nagy háromszög színes mintázata szimmetrikus a háromszög mindegyik magasságvonalára.

A továbbiakban egy tetszőleges lemezből, valamint a hozzá közvetlenül kapcsolódó lemezekből álló halmazt röviden *együttes*nek fogjuk nevezni, az együttesben levő lemezeket pedig tagoknak.

Az együttesek 2, 3 vagy 4 tagot számlálnak aszerint, hogy központi tagjuk, amelyikhez a többi tag mind kapcsolódik (a rajzon fekete háromszög), a nagy háromszög csúcsában, oldalán vagy belsejében helyezkedik el (1. ábra).



1. ábra



2. ábra

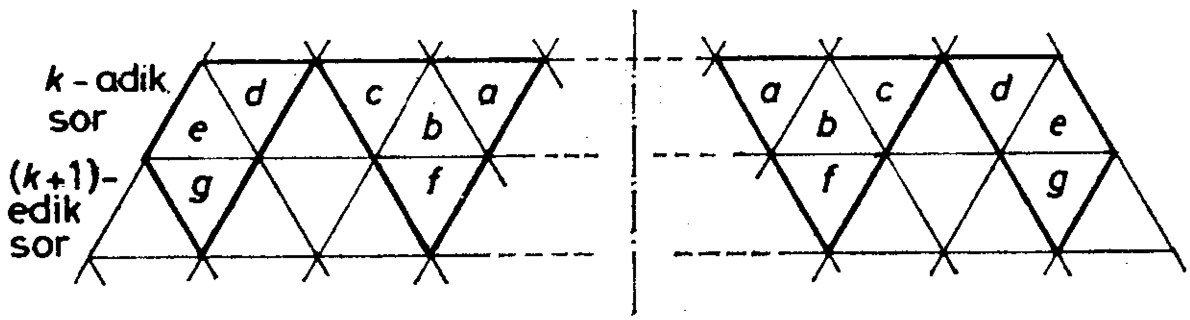
Az együttesekben bármely tag színét a többi tag színe egyértelműen meghatározza. A feladat feltételeinek megfelelően összeillesztett nagy háromszögben bármely együttes kék színű tagjainak száma páros, mivel piros központi taghoz páros számú kék, kékhez páratlan számú kék tag csatlakozik az együttesben. Egy tag tehát piros vagy kék kell legyen aszerint, hogy rajta kívül páros vagy páratlan számú kék tagja van az együttesnek.

Vizsgáljuk meg egy tetszőleges, a feladat feltételeinek megfelelően összeillesztett n egységnyi oldalú szabályos háromszög színezését. Bontsuk vízszintes sorokra a háromszöget a 2. ábra szerint. Az első (legfelső) sorban egyetlen lemez van, a másodikban három, a k-adikban $(2k-1)$: ezen belül $(k-1)$ darab lemez csúcsával lefelé, k darab lemez csúcsával felfelé áll.

Az első két sor színezése szimmetrikus a nagy háromszög függőleges magasságvonalára. (A következőkben szimmetrikus elhelyezkedésen elég erre a magasságvonalra vonatkozó szimmetriát érteni.) Négyféle színezés lehetséges: a) az X betű kéket és Y pirosat jelent, b) X piros és Y kék, c) mindkettő piros, d) mindkettő kék.

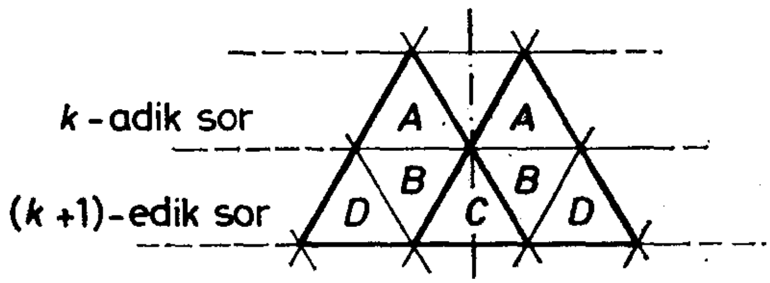
Belátjuk, hogy ha a háromszög színezésében a k-adik sorig megvan ez a szimmetria $(2 \leqq k < n)$, akkora $(k+1)$-edik sorban is fenn kell állnia.

Nézzük először a $(k+1)$-edik sorban csúcsukkal lefelé álló lemezeket! Ezek befoglalhatók olyan együttesekbe, melyek további tagjai mind a k-adik sorban vannak. A szimmetrikus elhelyezkedésű együttesek megfelelő tagjainak színe azonos a k-adik sorig bezárólag, és mivel egy tag színét a többi tagé meghatározza, ezért a $(k+1)$-edik sorba „belógó” tagoknál, azaz a szóban forgó lemezeknél folytatódik a színek szimmetriája (3. ábra).



3. ábra

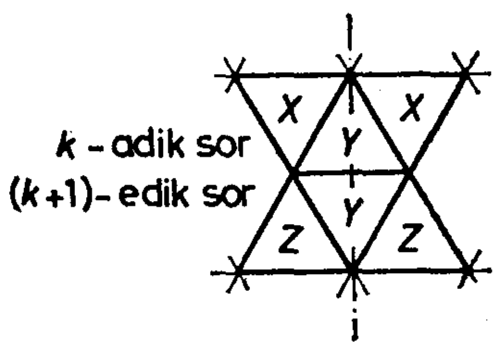
A $(k+1)$-edik sorban a csúcsukkal felfelé álló lemezek színét a sor közepétől kiindulva vizsgáljuk. Ha e lemezek száma páratlan, akkor van közöttük középső lemez. Ez a lemez közös tagja két szimmetrikus helyzetű együttesnek (4. ábra).



4. ábra

Ezeknek az együtteseknek a k-adik sorban levő tagjai a feltevés miatt egyező színűek (A), a $(k+1)$-edik sorban levő, csúccsal lefelé álló tagjai pedig az előbb mondottak értelmében egyező színűek (B). Egy lemez közös (C), így a fennmaradó tagok színének is meg kell egyeznie (D). Hasonló módon, középről a sor szélei felé haladva, lépésről lépésre kimutathatjuk a szimmetrikus helyzetű lemezek színének egyezését.

Ha a $(k+1)$-edik sorban a csúcsukkal felfelé álló lemezek száma páros, akkor középen csúcsával lefelé álló lemez van (5. ábra).

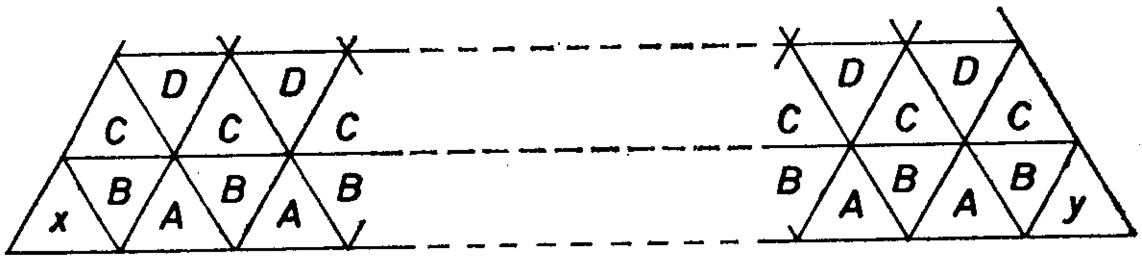


5. ábra

Tekintsük azt az együttest, melynek ez a lemez tagja, és amelynek másik három tagja a k-adik sorban van. (Az együttes biztosan négytagú, mivel $k \geqq 2$, de $(k+1)$ páros, tehát $k \geqq 3$). A k-adik sorban a szimmetrikus helyzetű lemezek egyező színűek (X), éppen ezért a másik két lemez színének is meg kell egyeznie (Y), hiszen a kék színű lemezek száma egy együttesben mindig páros. Az Y-nal jelölt lemezeket az a négytagú együttes is tartalmazza, melynek másik két tagja a $(k+1)$-edik sorban van. Ez utóbbiak a kék lemezek számának páros volta miatt ugyancsak egyező színűek (Z). A Z-vel jelölt lemezek egymás tükörképei. Ebből kiindulva most már ebben az esetben is lépésről lépésre kimutathatjuk a többi, csúcsával felfelé álló lemezről is a szimmetrikus elhelyezkedésűek színeinek egyezését, hiszen mindig olyan együttesek negyedik tagjaiként foghatók fel, amelyekben $3-3$ tag színének egyezését már megállapítottuk.

Szederkényi Edit (Szeged, Ságvári E. Gyak. Gimn., IV. o. t.)

II. megoldás, a feladat második részére. Írjunk a piros kis háromszögekbe (+1)-et, a kék háromszögekbe pedig (−1)-et. A feladat feltétele átfogalmazható úgy, hogy minden együttesben az ott található számok szorzata +1. Jelöljük x-szel, y-nal két, sarokba illesztett kis háromszög számát, a-val, b-vel, c-vel, ill. d-vel a megfelelő nagybetűvel jelzett háromszögekben található számok *szorzatát* (6. ábra). Elegendő megmutatnunk, hogy $x = y$, ebből a feladat állítása már következik.



6. ábra

Tekintsük mindazokat az együtteseket, melyek központi tagja B jelű háromszög. Az együttesekben álló számok szorzata külön-külön 1, tehát a szorzatok szorzata is 1. Másrészt a szorzatok szorzatában az A jelű háromszögekben álló számok kétszer, a B és C jelűekben álló számok egyszer szerepelnek, továbbá még itt van x és y is. Így

$$1 = a^2 \cdot b \cdot c \cdot x \cdot y.$$

Hasonlóan, ha azokat az együtteseket nézzük, melyek központi tagja C jelű háromszög, és az ezekben álló számok szorzatait szorozzuk össze, $1 = b \cdot c \cdot d^2$ adódik. Mivel minden szereplő érték vagy +1 vagy −1, ezekből $x = y$ adódik, ahogyan kívántuk.

Megjegyzés. A feladat feltételeinek nem csak a csupa piros lemezekből összeállított háromszög felel meg. Borítónkon több ilyen összeállítást mutatunk be (a kék lemezek kékek, a pirosak fehérek). Ezek alapján könnyen készíthető összeállítás minden n-re.