

The diagram shows a right-angled triangle ABC with the right angle at C. A horizontal line segment FE is drawn from point F on BC to point E on AB. A vertical line segment ED is drawn from point E to point D on AC. Point G is on AC such that CG = y and GD = x. Point J is on BC such that CJ = a. Point I is on AB such that BI = c. Point H is on AB such that AH = b. Point M is on ED such that EM = x and MD = y. Two regions are shaded with diagonal lines: triangle IEC' and quadrilateral EMHC'. The points are labeled as follows: B at the top left, C at the bottom left, A at the bottom right, F on BC, E on AB, D on AC, G on AC, J on BC, I on AB, C' on AB, H on AB, and M on ED. The segments are labeled: a for CJ, b for AH, c for BI, x for EM, y for MD, and y for CG.

$$BE : EA = CB : CA = a : b$$
$$BE : (BE + EA) = BE : c = a : (a + b),$$
$$FE = \frac{b}{c} BE = \frac{ab}{a+b}$$
$$BI = \frac{a}{b}y, \quad AH = \frac{b}{a}y,$$
$$y = \frac{c}{\frac{a}{b} + 1 + \frac{b}{a}} = \frac{abc}{a^2 + ab + b^2}.$$
$$CG = \frac{b}{c} JG = \frac{ab^2}{a^2 + ab + b^2} = CD \cdot \frac{ab + b^2}{a^2 + ab + b^2} < CD,$$
$$\frac{BI}{BE} = \frac{a(a+b)}{a^2+ab+b^2} < 1 \quad \text{és} \quad \frac{AH}{AE} = \frac{b(a+b)}{a^2+ab+b^2} < 1.$$

Ezek szerint a két négyzet közös része az $ELJGM$ ötszög, ahol L az EF , IJ szakaszpár, M pedig az ED , HG pár közös pontja: második négyzetünkben el kell hagynunk az EIL és az EHM háromszöget.

Ezek befogói az előbbi részeredmények felhasználásával

$$EI = BE - BI = \frac{ab^2c}{(a+b)(a^2+ab+b^2)} = \frac{b}{a+b} \cdot y,$$

$$IL = \frac{a}{b} EI = \frac{a}{a+b} \cdot y,$$

továbbá hasonló számítás eredményeként $HE = IL$ és $HM = IE$.

Ezek alapján a keresett terület

$$y^2 - EI \cdot IL = y^2 \left(1 - \frac{ab}{(a+b)^2} \right) = \frac{a^2+ab+b^2}{(a+b)^2} \cdot y^2 = \frac{a^2b^2(a^2+b^2)}{(a+b)^2(a^2+ab+b^2)}.$$

Megjegyzés. Ha a befogók helyett az átfogót és az egyik hegyesszöget tekintjük adottnak, akkor a két négyzet közös részének területe

$$\frac{c^2}{2} \cdot \frac{\sin^2 2\alpha}{(1 + \sin 2\alpha)(2 + \sin 2\alpha)} \leq \frac{c^2}{12}.$$

A felső korlátot $\alpha = 45^\circ$ mellett éri el a terület, és ekkor $1/3$ része az eredeti háromszög területének.