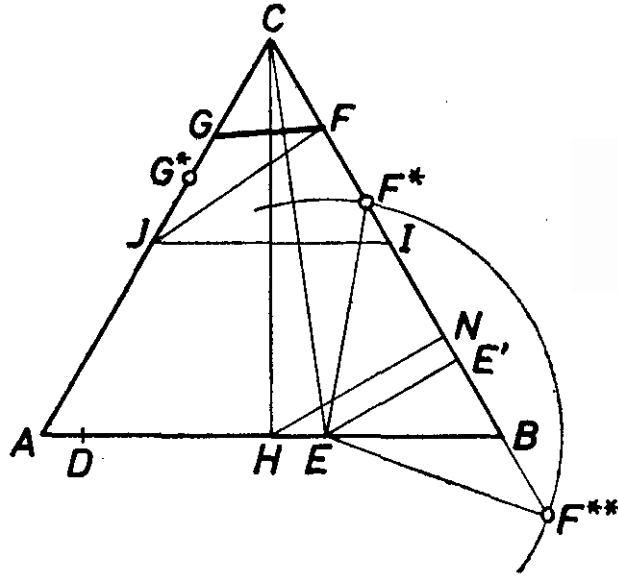


Megoldás. A beírás sokféle lehetősége folytán az állítás bizonyítására csak az az út látszik végigvihetőnek, hogy nem sikerül azt megcáfolni. Próbáljuk tehát bebiztosítani, hogy az egymás utáni oldalak nagyobbak legyenek a szabályos háromszög oldalának felénél és ez az utolsó nem fog sikerülni.

Legyenek a háromszög csúcsai A, B, C , a beírt négyszögéi – ugyanabban a forgási irányban körüljárva – D, E, F, G és legyen D az AB alapon. A négyszögnek legalább egy szomszédos csúcspárja egy háromszögoldalra esik, legyen E is AB -n. Jelöljük az AB, BC, CA oldal felezőpontját rendre H, I, J -vel.



1. ábra

Mivel így $AH = HB = \frac{1}{2}$, és ez éppen a négyszög oldalának el nem érhető alsó korlátja, azért D és E a H -nak két oldalán lehet csak, D az AH -n – kizárva H -t, de megengedve A -t, másrészt E a HB -n, de nem a H -ban.

Írjunk $\frac{1}{2}$ sugarú kört E -nek egy tetszőleges megengedett helyzete körül – de most B -t is kizárjuk – és jelöljük a BC egyenesen kimetszett pontjait F^* és F^{**} -gal úgy, hogy $CF^* < CF^{**}$. Ezek létrejönnek, mert E -nek és H -nak BC -n levő vetületét E' -vel, N -nel jelölve $EE' < HN < HB = \frac{1}{2}$. Ekkor F^* a CB szakaszon van, hiszen $EC > HC > \frac{1}{2}$.

Az F^*EB háromszögben $\frac{1}{2} = F^*E > EB$, ennél fogva $F^*BE \angle = 60^\circ > EF^*B \angle$, folytatólag $F^*EB \angle > 60^\circ$, így $F^*B > F^*E = \frac{1}{2}$. Így F^* az IC szakasz belsejében van és $F^*C < \frac{1}{2}$.

Másrészt F^{**} az F^* -nak E' -re való tükröképe, és E' a BN szakasz belsejében van, N pedig a BI felezőpontja, BC -nek első megvédő pontja. Ezek szerint

$$F^{**}E' = F^*E' > F^*N > IN = BN > BE',$$

vagyis F^{**} a BC oldal B -n túli meghosszabbításán van.

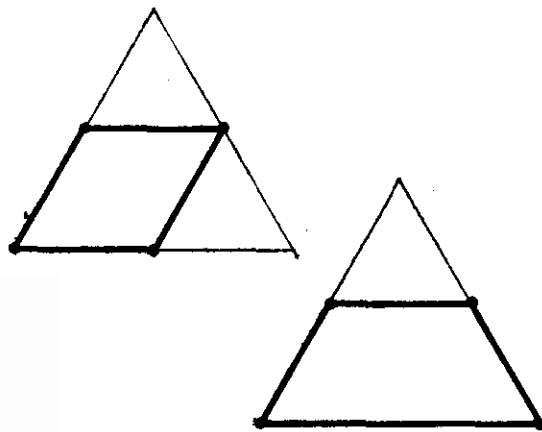
Végül is a BF^* szakasz minden belső pontja közelebb van E -hez, mint $F^*E = \frac{1}{2}$. Ezért F vagy csak a CF^* szakaszon lehet, F^* -ot kizárva – ami mindjárt azt is jelenti, hogy a BC oldalon nem lehet két csúcsa a beírt négyszögnek, vagy pedig nem is a BC -n van, hanem AC -n.

Számolgatás nélkül kapjuk ugyanezeket F helyzetére, ha E -t azonosnak vesszük B -vel. Ámde a meg gondolást megismételve a CH tengelyre tükrös elemekkel, azt kapjuk, hogy az AC oldalon sem lehet két csúcsa a négyszögnek emiatt F csak CF^* -on lehet, továbbá a G csúcs csak a CG^* szakasz belsejében lehet, ahol $G^*D = \frac{1}{2}$ és G^* a JC szakasz belsejében van.

Így pedig a négyszög negyedik oldalára $FG < FJ < IJ = \frac{1}{2}$.

Minden lehetőséget figyelembe vettünk, és nem sikerült a negyedik oldalra biztosítani, hogy nagyobb legyen $\frac{1}{2}$ -nél, ezzel az állítás bizonyossággá vált.

Megjegyzés. Ha megengedünk $\frac{1}{2}$ hosszúságú oldalakat is, akkor a 2. ábrán látható beírt négyszögek megfelelnek.



2. ábra