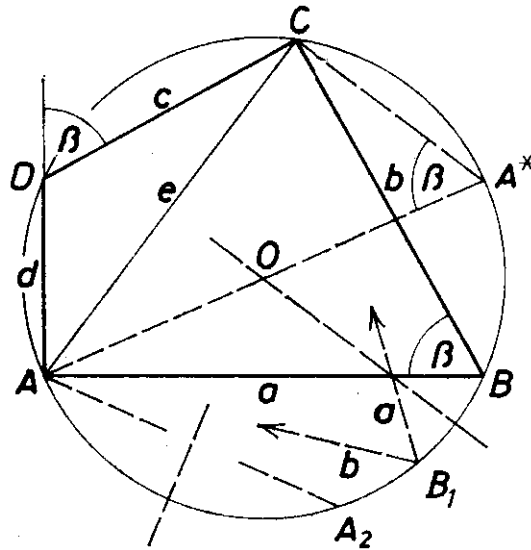


Megoldás. I. rész. 1. A csuklókat A, B, C, D betűvel jelöljük. Az $AB = 23, BC = 20, CD = 15, DA = 10$ megválasztással sikerült egy kör kerületére hozni a csuklókat úgy, hogy akármelyik szakasz egyeneséhez képest a nem rajta fekvő csuklók ugyanazon a parton vannak. (Az $ABCD$ négyszög konvex.) Ezt a megfelelő sugár kiszámításával igazoljuk.



1. ábra

Felhasználjuk még az $AC = e$ és $ABC \sphericalangle = \beta$ méreteket (1. ábra). Ekkor $CDA \sphericalangle = 180^\circ - \beta$, és a cosinustétel szerint, a szakaszok hosszát rendre a, b, c, d -vel jelölve

$$e^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \beta = c^2 + d^2 + 2cd \cos \beta,$$

hiszen $\cos(180^\circ - \beta) = -\cos \beta$. Innen

$$\cos \beta = \frac{(a^2 + b^2) - (c^2 + d^2)}{2(ab + cd)} = \frac{604}{1220}$$

révén $\beta = 60^\circ, 325$, továbbá $e^2 = 57\,770/122, e = 21,761$, végül az AA^*C derékszögű háromszögből – ahol AA^* átmérő és $AA^*C \sphericalangle = \beta$ –

$$AA^* = \frac{e}{\sin \beta} = 25,045, \quad r_1 = 12,523 \text{ egység.}$$

Kiemeljük, hogy az eredmény egyértelműen adódott, a négy szakasz hossza és föltételezett sorrendje egyértelműen meghatározta a belőlük adódó húrnégyszög körülírt körének sugarát.

2. A $\cos \beta$ és e^2 kifejezések nem változnak meg a és b fölcserélésével úgyszintén a c, d cserével sem. Eszerint ugyanez a β, e és r_1 érték adódik a következő sorrendekből is (az eredeti a, b, c, d mellé): b, a, c, d ; a, d, b, c ; a két újabb sorrend azonban csak a körüljárás irányában különbözik egymástól.

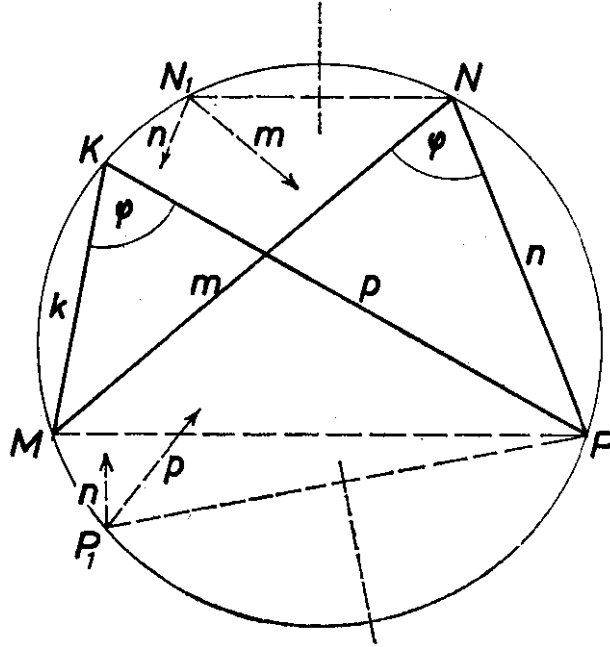
3. Leolvasható a felcserélhetőség az 1. ábráról is, ahol B_1 a B csukló tükörképe az AC átló felező merőlegesére. Így ugyanis $AB_1 = CB = b$ és $B_1C = BA = a$, továbbá B_1 is a körön van, tehát az ugyanazon körbe írt, ugyancsak konvex AB_1CD húrnégyszög is megvalósítható az adott szakaszok más sorrendjével.

4. A kiindulásban a c szakasz volt. az a -val szemben (nem csatlakozóan), az AB_1CD -ben pedig a d szakasz. Szemben levővé tehetjük a -val a b szakaszt is úgy, hogy pl. A -t a BD átló felező merőlegesére tükrözzük A_2 -be, mert A_2 is a körön van, és $A_2D = AB = a$, valamint $A_2B = AD = d$. Most a DA_2BC négyszögben a, d, b, c a szakaszok sorrendje.

Ezek szerint ha a szakaszok konvex négyszöget zárnak közre, akkor bármilyen sorrendjük mellett ugyanakkora sugarat kapunk arra a körre, amely mind a négy csuklót tartalmazza, hiszen az a szakasz és a vele szemben fekvő c, d , ill. b esetével végigvettünk a további két szakasz szembenállására is minden lehetőséget.

A sorrend fölcserélhetősége szemléletesen azt jelenti, hogy az AOB, BOC, COD és DOA körcikkeket tetszés szerinti sorrendben összerakhatjuk teljes körre.

II. rész. Próbáljunk most hurkolt $KMNP$ húrnégyszöget összeállítani az egymástól különböző k, m, n, p szakaszból, ebben a sorrendben, a 2. ábra szerint.



2. ábra

Tegyük fel, hogy sikerült ez. Látni ebből, hogy így az N -nek az MP húr felező merőlegesére való N_1 tükörképét felhasználva, a KMN_1P is hurkolt négyszög és az is megfelelő, de az m szakasz kerül k -val szembe. (Nem lehet, hogy N_1 azonos legyen K -val, mert abból $n = k$ következne. Továbbá P -nek a KN felező merőlegesére való P_1 tükörképével KMN_1P_1 is megfelelő, és ebben p áll k -val szemben. Ha tehát létezik hurkolt megoldás, akkor minden lehetséges sorrendben kapcsolhatók a szakaszok. Más szóval: a négyszög létezése nem a sorrenden múlik.

Jelöljük a talált kör sugarát r_2 -vel és legyen még $MP = q$, $MKP \sphericalangle = MNP \sphericalangle = \varphi$. Az előbbi számításhoz hasonlóan

$$\cos \varphi = \frac{(k^2 + p^2) - (m^2 + n^2)}{2(kp - mn)},$$

hacsak $kp \neq mn$, és ha a jobb oldal kisebb, mint 1.

Mivel adataink egész számok, és köztük a 23 prímszám, ezért a nevező nem tűnik el. Abból is látni ezt, hogy három olyan adatunk van, amely 5-nek első hatványával osztható.

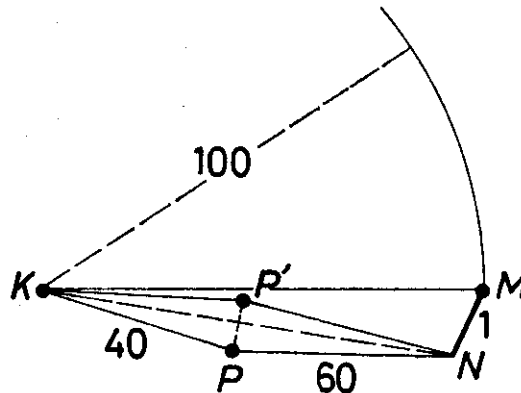
Vegyük a $k = 23$, $m = 20$, $n = 15$, $p = 10$ szereposztást, ebből $\cos \varphi = -1/35$, $\varphi = 91^\circ 637'$, $q^2 = 4495/7$ és $r_2 = 12,675$.

Szemléletesen azt jelenti a sorrendnek a hurkolt négyszögben való megváltoztatása, hogy a csuklók közti körívekhez tartozó körcikkek „egymás után” rakásában alkalmas két cikk után visszafordulunk. A kiszámított r_2 -vel a szakaszokhoz tartozó középponti szögek $130,^\circ 26$; $104,^\circ 17$; $72,^\circ 56$ és $46,^\circ 47$, a két szélső összege egyenlő a belsők összegével. Visszafordulás esetén azonban a 360° -ra kiegészítő $229,^\circ 74$, szöggel számoljon az érdeklődő.

Feladatunkat tehát két sugárméret elégíti ki, mindegyik meghatározza a csuklós négyszög konvex, ill. hurkolt jellegét, a szakaszok sorrendjét azonban nem.

Megjegyzések. 1. Természetes, ha a számadatokat csak elindításnak tekintjük, és legalább numerikusan megnézzünk néhány más helyzetet.

Csak akkor lehet szó megoldásról, ha szakaszaink legnagyobbika kisebb, mint a többiek összege. Ez azonban hurkolt megoldáshoz nem elegendő, a 3. ábrán egy ilyesféle példát vázolunk: $k = 100$, $m = 1$, $n = 60$, $p = 40$, és ezekből $\cos \varphi = 1,015$ lenne. Ekkor nincsen megfelelő kör.



3. ábra

2. Nem szükségképpen – mint a feladatban adódott –, hogy $r_2 > r_1$ legyen. Lehet $r_2 = r_1$ is, ha $k^2 + p^2 = m^2 + n^2$, vagyis a szakaszok négyzetösszege két egyenlő részre tagolható, az egyik átló éppen átmérő.

Más példa: a $20, 20, x, x$ ($x < 20$) szakaszokból az egyik hurkolt esetben $r_2 = 10$ (a $20, x, 20, x$ sorrendben pedig határozatlan), a konvexben $r_1 = \sqrt{10^2 + (x/2)^2} > r_2$. Az általános kérdésben természetesen nem szorítkozunk csupa különböző szakaszra. Tovább azonban nem elemezzük a kérdést.

3. Számos versenyző küldött be a feladathoz kétféle megoldási ötletet. Sajnálatos azonban, hogy figyelmen kívül hagyták a hurkolt négyszög lehetőségét, így csak *egy* hiányos megoldásért járó pontot kaptak.