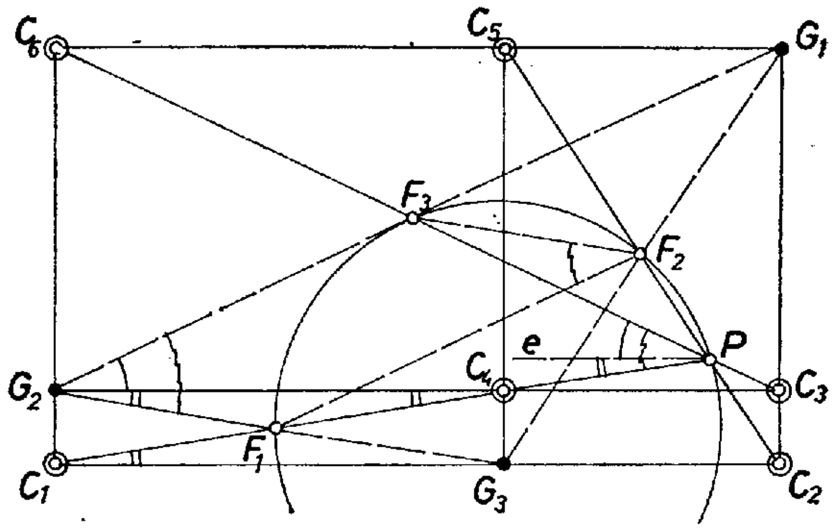
Jelöljük a C_1C_4, C_2C_5 és C_3C_6 szakasz felezőpontját rendre F_1, F_2, F_3 betűvel, a C_1C_4, C_2C_5, és C_3C_6 egyenesek közös pontját pedig – mint már a 2365. feladatban – P-vel. Az állítást az ábráinkon látható felvételek esetére azzal bizonyítjuk, hogy az F_1F_3 szakasznak P-ből vett látószöge egyenlő az F_2-ből vett látószögével. Más felvételen előfordulhat, hogy P és F_2 az F_1F_3 egyenes két különböző partján van, ilyenkor a két látószög 180°-ra egészíti ki egymást, ami lényegében ugyanúgy bizonyítható.

Természetesen külön tárgyaljuk majd a hatszög olyan helyzeteit, amelyekben P nem jön létre. Látni fogjuk, hogy ilyenkor a felezőpontok egy egyenesre esnek, tehát ugyanekkor a szóban forgó kör sem jön létre, illetve elfajul „végtelen sugarúvá".



1. ábra

1. A bizonyításba bevonjuk azt a három pontot is, amelyet hatszögünk szemben levő oldalegyenes párjai határoznak meg, legyen a C_2C_3, C_5C_6 oldalpár metszéspontja G_1, a C_3C_4, C_6C_1, páré G_2, a C_4C_5, C_1C_2 páré G_3. (Más szóval a közös irányú 3–3 oldalegyenes által meghatározott mind a 9 pontnak szerepe van az alakzatban.) Azt a 3 téglalapot használjuk fel, amelyeknek a csúcsai váltakozva C és G típusú pontok. Egyik ilyen a $C_1G_2C_4G_3$, ebben a kérdéses F_1 pont a G_2G_3 átlót is felezi. Ugyanígy felezi F_2 a G_3G_1 szakaszt, F_3 a G_1G_2-t, ennélfogva az $F_1F_2F_3$ háromszög a $G_1G_2G_3$ háromszög középháromszöge, tehát szögeik páronként rendre egyenlők.

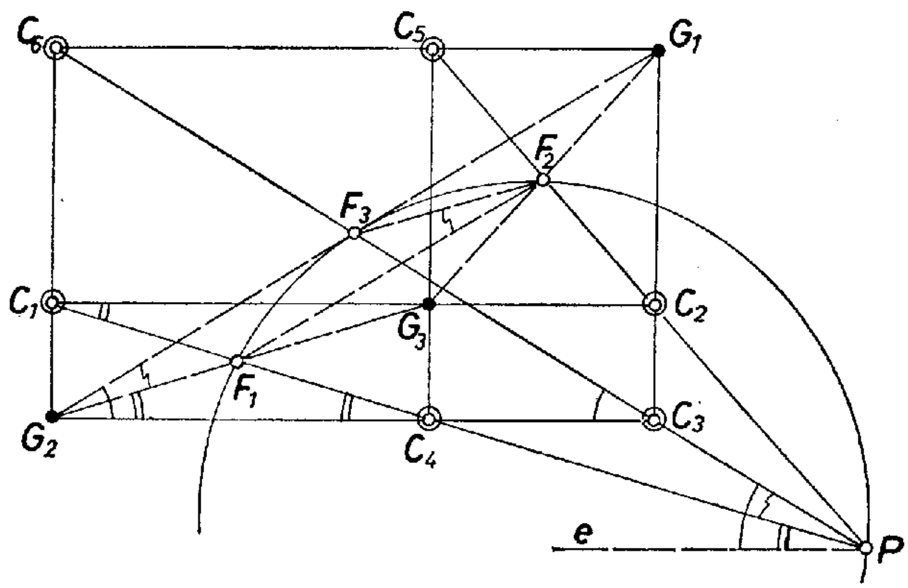
Vegyük a P-n átmenő és C_1C_2-vel párhuzamos e félegyenest. Ezzel az F_1PF_3 látószöget két részre osztjuk (1. ábra), ill. e ugyanazon oldalán fekvő két szög különbségeként állíthatjuk elő (2. ábra). A részek rendre egyenlők az említett téglalapokban az e-vel párhuzamos oldal és az átló közti szöggel:

$$F_3Pe\sphericalangle = F_3C_3G_2\sphericalangle = F_3G_2C_3\sphericalangle,$$
$$F_1Pe\sphericalangle = F_1C_4G_2\sphericalangle = F_1G_2C_3\sphericalangle,$$

ennélfogva mindkét felvétel esetében

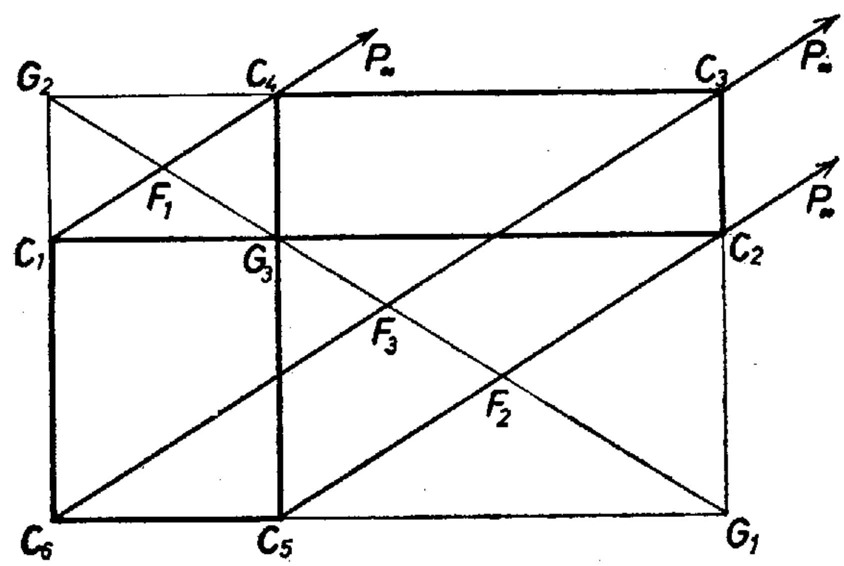
$$F_3PF_1\sphericalangle = F_3G_2F_1\sphericalangle \pm F_1G_2C_3\sphericalangle = F_3G_2F_1\sphericalangle = F_3F_2F_1\sphericalangle,$$

ezt *akartuk* bizonyítani, és ezzel azt is bebizonyítottuk, amit *kellett*.



2. ábra

2. Ha P nem jön létre, ez azt jelenti, hogy a felhasznált téglalapok hasonlóak, (mert egyeznek az átlóknak az oldalakkal alkotott szögei.) Így $F_1G_2C_3\sphericalangle = F_3G_2C_3\sphericalangle = F_3G_3C_2\sphericalangle$, $F_2G_3C_2\sphericalangle$, a $G_1G_2G_3$ és $F_1F_2F_3$ háromszögeket meghatározó pontok egy egyenesbe esnek (3. ábra).



3. ábra

Ez a 2365. feladat I. megoldása (4) összefüggésének megfelelője.

Megjegyzések. 1. Visszatekintve a 2365. feladatra, látjuk, hogy itt fel kellett használnunk a merőlegességet a 3–3 oldalegyenes között – a téglalapok szögeinek egyenlőségében. Eszerint a feladat állítása ferdén hajló egyeneshármasok esetében nem érvényes.

2. Egy dolgozat azzal az ellenpéldával vélte bizonyítani a feladat állításának „valótlanságát", amely a 3. ábrából jön létre, amikor bármelyik két szomszédos párhuzamos között ugyanakkora a távolság. A beküldő – sajnos – még eléggé távol áll a matematikai gondolkodástól. Nem azt akarjuk ezzel mondani, hogy nem szabad megnézni különlegesen egyszerű helyzeteket, hanem azt, hogy *nem szabad ezek után megállni.* Keresni kell, hogy mi igaz a kitűzésből a szó legszorosabb értelmében, továbbá hogy mit jelentenek az elfajulások.

3. Ha rögzítjük az F ponthármast, vagyis a G-hármast is, a kör változatlan marad. A kör bármely pontját P-nek választva, megkapható az őt előállító C-ponthatos: a PF szelők metszik ki őket párosával a G_iG_j átmérőjű körökből.