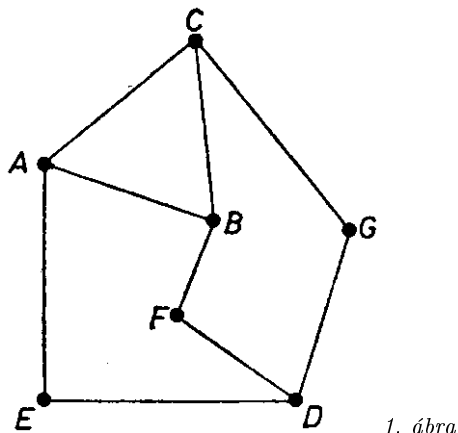


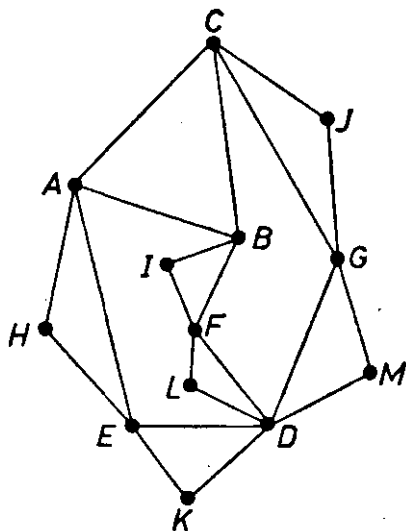
Ábrázoljuk a társaság tagjait az ábécé nagy betűivel jelölt pontokkal és ismertségüket – melyet kölcsönösnek feltételezünk – e pontokat összekötő szakaszokkal. Tehát két pont akkor és csak akkor van összekötve, ha az általuk reprezentált személyek ismerősök. A feltételek miatt ebben a pontszakasz rendszerben biztosan van legalább egy AB szakasz és van egy C pont úgy, hogy AC és BC szakasz is létezik.

Megmutatjuk, hogy az összes többi pont össze van kötve A , B , C valamelyikével.

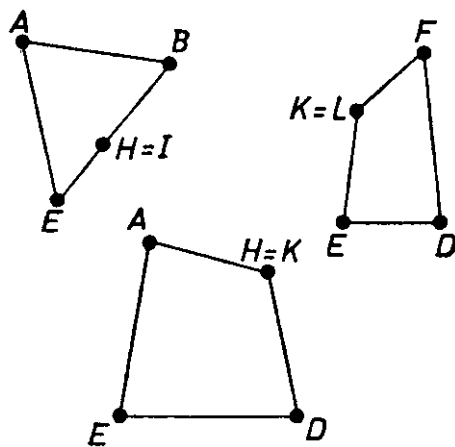
Tegyük fel ugyanis, hogy D nem ismeri A , B , C egyikét sem. Ekkor létezik E , aki A -t és D -t ismeri. A feltétel szerint E nincs összekötve sem B -vel, sem C -vel, hiszen ekkor lenne a társaságban két olyan ember, akit nem pontosan egy másik ismer. (Pontok és szakaszok nyelvén ezt úgy fogalmazhatjuk, hogy négyszög nem jöhet létre, hiszen ennek átellenes csúcsai nem felelnek meg a feltételeknek.) Ugyanígyen okból létezik F , aki B -t és D -t ismeri, valamint G , aki C -t és D -t ismeri (1. ábra).



1. ábra



2. ábra



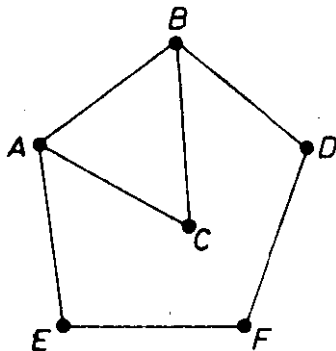
3. ábra

Az ábrán szereplő hét ember között további ismeretségek nem lehetnek, mert bármely két pontot összekötő szakaszt behúzva, négyszög keletkezne. Vannak továbbá olyan H , I , J , K , L , M tagjai, a társaságnak, akik rendre az (A, E) ,

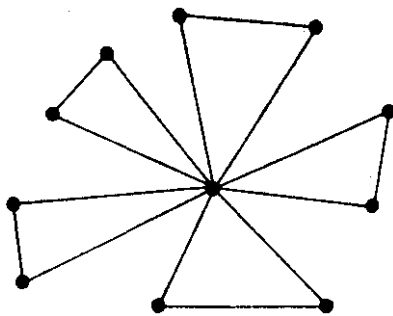
(B, F) , (C, G) , (E, D) , (F, D) , (G, D) párok közös ismerősei (2. ábra). Előző megjegyzésünk alapján e hat ember bármelyike különbözik az 1. ábrán szereplő hét ember bármelyikétől. Belátjuk, hogy H, I, J, K, L, M -mel valóban hat egymástól különböző embert jelöltünk. Elég a $H = I$, $H = K$, $K = L$ eseteket kizárni. A 3. ábráról leolvasható, hogy pont-szakasz rendszerünkben bármelyik egyenlőség fennállása esetén négyszög keletkezne.

Mivel indirekt feltevésünkéből az következett, hogy a társaságnak legalább 13 tagja van, állíthatjuk, hogy mindenki ismeri A, B, C valamelyikét.

Megmutatjuk, hogy az összes többi pont A, B, C közül ugyanazzal van összekötve.



4. ábra



5. ábra

Tegyük fel ugyanis ennek ellenkezőjét, tehát hogy DB és EA szakaszok léteznek. Mivel minden pont az A, B, C közül pontosan eggyel van összekötve, léteznie kell egy F -nek, aki E -t és D -t ismeri. Ez az F azonban nem lehet összekötve sem A -val, sem B -vel, sem C -vel, mivel ekkor az (F, B) ; (F, A) ; (F, C) párokat két tagja is ismerné a társaságnak (4. ábra).

Így tehát mindenki ismeri A, B, C egyikét, pl. A -t. Az 5. ábrán látható, hogy létezik ilyen, a feltételeknek megfelelő társaság.

Szabó Endre (Budapest, Fazekas M. Gyak. Gimn., IV. o. t.)

Megjegyzés. A feladat állítása nemcsak 11, hanem bármilyen páratlan számú tagból álló társaságra igaz. Ennek a „barátság-tétel” néven ismert állításnak bizonyítása egyáltalán nem könnyű.