

Mivel $1 = (\sin^2 x + \cos^2 x)^3 = \sin^6 x + \cos^6 x + 3 \sin^2 x \cos^2 x$, továbbá

$$1 = (\sin^2 x + \cos^2 x)^2 = \sin^4 x + \cos^4 x + 2 \sin^2 x \cos^2 x,$$

az $E(x)$ kifejezést a következő alakba írhatjuk:

$$\begin{aligned} (1) \quad E(x) &= 1 - 3 \sin^2 x \cos^2 x + p(1 - 2 \sin^2 x \cos^2 x) = \\ &= 1 - \frac{3}{4} \sin^2 2x + p \left(1 - \frac{1}{2} \sin^2 2x \right) = (1 + p) - \frac{3 + 2p}{4} \sin^2 2x. \end{aligned}$$

Ha most $E(x)$ értéke független x -től, akkor például $E(0) = E(\pi/4)$, azaz $(1 + p) = (1 + p) - (3 + 2p)/4$. Tehát szükségképpen $p = -3/2$. Fordítva, ha $p = -3/2$, akkor $E(x)$ értéke (1) alapján $-1/2$ minden x -re. Ezzel megválasztuk a feladat a) kérdését.

Ami b)-t illeti, feltehetjük, hogy $p \neq -3/2$, hiszen ekkor $E(x) = 0$ -nak nincs megoldása. (1) alapján $E(x) = 0$ akkor és csak akkor, ha

$$\sin^2 2x = \frac{4(1 + p)}{3 + 2p} = 1 + \frac{1 + 2p}{3 + 2p}.$$

Ezt kielégítő x pedig akkor és csak akkor létezik, ha

$$0 \leq \frac{4(1 + p)}{3 + 2p} = 1 + \frac{1 + 2p}{3 + 2p} \leq 1.$$

Az első egyenlőtlenség akkor áll, ha $p < -3/2$, vagy $p \geq -1$; a második egyenlőtlenség pedig csak a $-3/2 < p \leq -1/2$ értékre teljesül. Így az $E(x) = 0$ egyenletnek akkor és csak akkor van megoldása, ha $-1 \leq p \leq -1/2$.