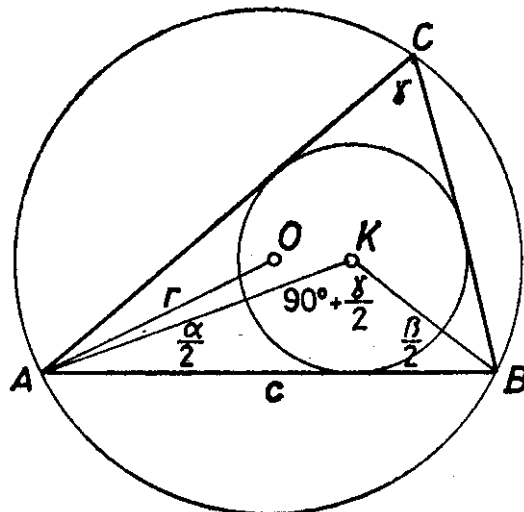


I. megoldás. Jelöljük az ABC háromszög szögeit és oldalait a szokott módon. A háromszög köré írható kör középpontja O , sugara a feladat szerint $r = 1$.

A feltételi egyenletben szereplő szakaszokat a háromszög szögeivel hozzuk összefüggésbe. Példaképpen KA -t vizsgáljuk (1. ábra).



1. ábra

Az AKB háromszög A -nál és B -nél fekvő szögei $\frac{\alpha}{2}$, ill. $\frac{\beta}{2}$, K -nál levő szöge ezért $90^\circ + \frac{\gamma}{2}$. Mivel $AB = c = 2r \sin \gamma = 2 \sin \gamma$, az AKB háromszögben a sinustétel alapján

$$KA = \frac{2 \sin \gamma \sin \frac{\beta}{2}}{\sin \left(90^\circ + \frac{\gamma}{2} \right)}.$$

Felhasználva, hogy

$$\sin \gamma = 2 \sin \frac{\gamma}{2} \cos \frac{\gamma}{2},$$

továbbá, hogy

$$\sin \left(90^\circ + \frac{\gamma}{2} \right) = \cos \frac{\gamma}{2},$$

(1)

$$KA = 4 \sin \frac{\beta}{2} \sin \frac{\gamma}{2}$$

Hasonló módon kapható

$$KB = 4 \sin \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\gamma}{2} \quad \text{és} \quad KC = 4 \sin \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\beta}{2}.$$

A feladat feltétele folytán

$$64 \sin^2 \frac{\alpha}{2} \sin^2 \frac{\beta}{2} \sin^2 \frac{\gamma}{2} = 1,$$

vagyis – tekintettel arra, hogy egy háromszög szögeiről van szó –

(2)

$$8 \sin \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\beta}{2} \sin \frac{\gamma}{2} = 1.$$

$$2 \sin \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\beta}{2} = \cos \frac{\alpha - \beta}{2} - \cos \frac{\alpha + \beta}{2}$$

és

$$\cos \frac{\alpha + \beta}{2} = \sin \frac{\gamma}{2}$$

felhasználásával pedig

$$4 \left(\cos \frac{\alpha - \beta}{2} - \sin \frac{\gamma}{2} \right) \sin \frac{\gamma}{2} = 1.$$

Belátjuk, hogy a bal oldali kifejezés csak $\alpha = \beta = \gamma = 60^\circ$ esetén lehet egyenlő 1-gyel, minden más esetben ennél kisebb.

$\cos \frac{\alpha - \beta}{2}$ maximális értéke 1. Ezt akkor veszi fel, ha $\alpha = \beta$. Ez y -ra nem jelent megszorítást.

$$4 \left(1 - \sin \frac{\gamma}{2}\right) \sin \frac{\gamma}{2} = 1 - \left(1 - 2 \sin \frac{\gamma}{2}\right)^2.$$

Viszont legnagyobb értékét (1-et) $\sin \frac{\gamma}{2} = \frac{1}{2}$ esetén veszi fel. Ekkor $\gamma = 60^\circ$, és mivel még $\alpha = \beta$ is fenn kell álljon, ezért valóban csak szabályos háromszögre áll fenn az egyenlőség.

Bolla József (Fonyód, Karikás F. Gimn., III. o. t.)

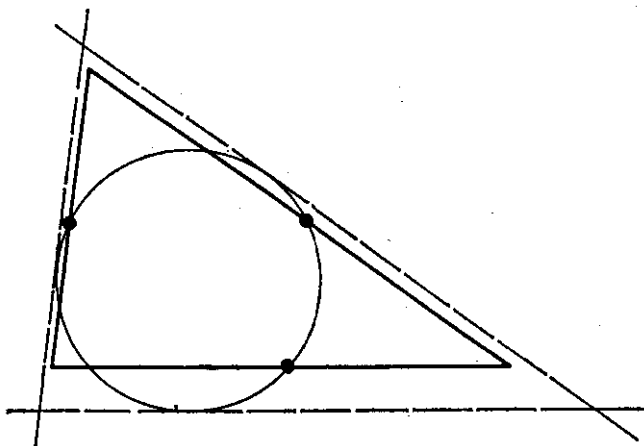
II. megoldás. Jelöljük az ABC háromszögbe írt kör sugarát ϱ -val. Az I. megoldásban vizsgált KA szakasz hossza ezzel is kifejezhető, hiszen $\varrho = KA \sin \frac{\alpha}{2}$, így (1) alapján

$$\varrho = 4 \sin \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\beta}{2} \sin \frac{\gamma}{2}.$$

Ezt az I. megoldásban kapott (2) összefüggéssel összevetve kapjuk, hogy a feladat feltétele ekvivalens a

$$(3) \quad \varrho = \frac{1}{2}$$

feltétellel. Rajzoljuk meg az ABC háromszög oldalfelező pontjain átmenő kört, ennek nyilván $\frac{1}{2}$ a sugara. Húzzuk meg ennek az oldalakkal párhuzamos érintőit (2. ábra).



2. ábra

Ezek az eredeti háromszöget tartalmazó, ahhoz hasonló háromszöget határoznak meg. Mivel az ebbe írt kör sugara $\frac{1}{2}$, az eredetibe írt kör sugara ennél nem lehet nagyobb: $\varrho \leq \frac{1}{2}$. Itt egyenlőség csak akkor lehet, ha az oldal felező pontokon átmenő kör érinti az oldalakat, vagyis a beírt és körülírt körök középpontja egybeesik. Ekkor viszont a háromszög nyilván szabályos.

Megjegyzések. 1. A II. megoldásban a $\varrho \leq \frac{r}{2}$ összefüggést bizonyító megfontolás – tudomásunk szerint – *Gallai Tibor*tól származik.

2. Ha már tudjuk (3)-at, ebből a beírt és körülírt kör középpontjának az egybeesésére az Eulertól származó

$$OK^2 = r(r - 2\varrho)$$

összefüggés alapján is következtethetünk, hiszen (3) és (4) együtt épp azt jelenti, hogy OK hossza 0.