

**I. megoldás.** Vezessük be az  $u = \frac{x+y}{2}$  és  $v = \frac{x-y}{2}$  jelöléseket. Ezekkel  $x = u+v$ ,  $y = u-v$ , és egyenletrendszerünk a következőképpen alakul:

$$(1) \quad 2 \cos u \cos v = 2 \cos^2 u - 1,$$

$$(2) \quad 2 \sin u \cos v = 2 \sin u \cos u.$$

(1) alapján  $\cos u \neq \cos v$ , hiszen  $2 \cos^2 u \neq 2 \cos^2 u - 1$ , így (2) pontosan akkor teljesül, ha  $\sin u = 0$ , azaz

$$u = k\pi$$

valamilyen  $k$  egész számmal. Ekkor  $\cos u = (-1)^k$ , és (1)-ből  $\cos v = (-1)^k/2$ , azaz

$$v = \pm \frac{\pi}{3} + k\pi + 2l\pi,$$

ahol  $l$  egész szám. Az (1) és (2) egyenleteket ezek és csak ezek az  $u, v$  számok elégítik ki, így az eredeti egyenletrendszer megoldásai

$$x = u + v = \pm \frac{\pi}{3} + 2(k+l)\pi, \quad y = u - v = \mp \frac{\pi}{3} + 2l\pi,$$

ahol  $k$  és  $l$  tetszőleges egészek.

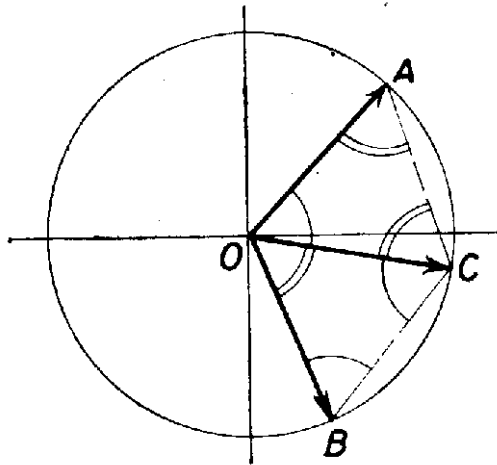
**II. megoldás.** Jelöljük az első koordináta-tengely pozitív irányával  $x$ , illetve  $y$  szöget bezáró egységvektort **a**-val, illetve **b**-vel, az  $x+y$  szöget bezáró egységvektort pedig **c**-vel. Jelöléseink mellett a feladat egyenletrendszere ekvivalens a

$$(3) \quad \mathbf{c} = \mathbf{a} + \mathbf{b}$$

egyenlettel. Jelöljük továbbá az origót  $O$ -val, az  $O$ -ból induló **a**, **b**, **c** vektorok végpontját pedig  $A$ -val,  $B$ -vel,  $C$ -vel.

Mivel **a**, **b** egységvektorok, a (3) egyenlet azt jelenti, hogy a következő három eset valamelyike következik be:

1. **a** és **b** egyirányúak, ekkor **c** a kétszeresük;
2. **a** és **b** ellentétes irányúak, ekkor **c** null-vektor;
3. az  $OACB$  négyszög paralelogramma.



Mivel másfelől **c** is egységvektor, csak a harmadik eset jöhet szóba. Ekkor  $AC \parallel OB$ ,  $BC \parallel OA$  miatt az  $O$ -nál levő szögek  $C$ -nél is megjelennek, és  $OA = OC = OB$  miatt átmásolhatóak  $A$ -ba,  $B$ -be. Ámde ekkor csak  $60^\circ$ -osak lehetnek, és emiatt

$$x = \pm 60^\circ + n \cdot 360^\circ,$$

$$y = \mp 60^\circ + m \cdot 360^\circ,$$

ahol  $n, m$  tetszőleges egészek.