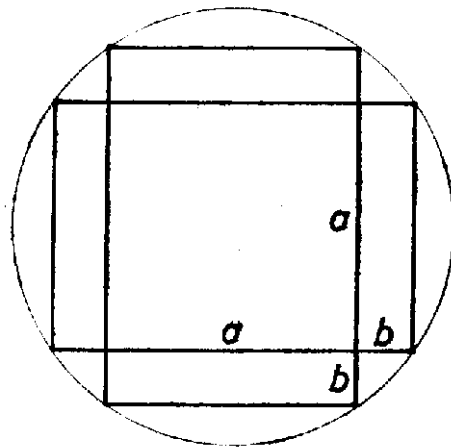




Jelöljük a kör átmérőjét D -vel, a doboz űrtartalmát V -vel, Pitagorasz tétele szerint

$$(a + 2b)^2 + a^2 = D^2,$$

tehát ez a mennyiség független az a , b méretek

$$x = \frac{a}{b}$$

arányától. Ezt az arányt úgy kell meghatároznunk, hogy

$$V = a^2 b$$

maximális legyen, vagy ami ugyanezt jelenti, az

$$f(x) = \frac{D^2}{V^{2/3}} + \frac{(a + 2b)^2 + a^2}{(a^2 b)^{2/3}} = \frac{(x + 2)^2 + x^2}{x^{4/3}}$$

függvény értéke minimális legyen.

Annak érdekében, hogy kényelmesebben tudjunk deriválni, vezessük be az

$$x = y^3$$

változót. Mivel a feladat geometriai jelentése szerint $x > 0$, az új változó a régiek monoton függvénye, így alkalmazása a szélső érték keresését nem zavarja meg. Így a

$$g(y) = \frac{(y^3 + 2)^2 + y^6}{y^4} = 2y^2 + \frac{4}{y} + \frac{4}{y^4}$$

függvény maximumát kell meghatároznunk az $y > 0$ feltétel mellett. A függvény deriváltja

$$g'(y) = \frac{4}{y^2} \left(y^3 - 1 - \frac{4}{y^3} \right)$$

az y monoton növekvő függvénye, tehát csak egyetlen helyen lehet 0-val egyenlő. Itt maga a függvény fogyóból növekvőbe vált át, tehát minimuma van. Mivel a derivált értéke akkor 0, ha

$$x - \frac{4}{x} = 1$$

ez a feltétel határozza meg az x arány keresett értékét.

A $x^2 - x - 4 = 0$ másodfokú egyenlet pozitív gyöke $x = \frac{1 + \sqrt{17}}{2}$, tehát ez az a/b hányados értéke akkor, amikor a doboz űrtartalma maximális.