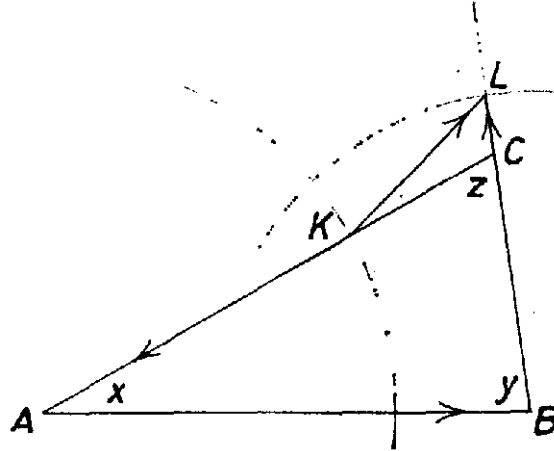


Az általánosság megszorítása nélkül feltehetjük, hogy $a \geq b \geq c$, s így $\frac{ab}{c} \geq \frac{ac}{b} \geq \frac{bc}{a}$.

Legyen az A és B pontok távolsága $\sqrt{ab/c}$, s legyen C a síknak az a pontja, melyre az ABC háromszög szögei éppen x , y , illetve z (1. ábra).



1. ábra

Vegyük fel az AC félegyenesen a K pontot úgy, hogy $AK = \sqrt{ac/b}$, s a BC félegyenesen az L pontot úgy, hogy $BL = \sqrt{bc/a}$ legyen. Világos, hogy K az A középpontú, $\sqrt{ac/b}$ sugarú körön, L pedig a B középpontú, $\sqrt{bc/a}$ sugarú körön van. Elsőként a KL távolságot határozzuk meg. Ehhez vegyük észre, hogy a $\vec{KL}$ vektor a $\vec{KA}$, $\vec{AB}$, $\vec{BL}$ vektorok összege, ahonnan

$$KL^2 = (\vec{KA} + \vec{AB} + \vec{BL})^2 = KA^2 + AB^2 + BL^2 + 2\vec{KA} \cdot \vec{AB} + 2\vec{KA} \cdot \vec{BL} + 2\vec{AB} \cdot \vec{BL}.$$

Az itt szereplő három skaláris szorzat értékét könnyen megkaphatjuk, hiszen a $\vec{KA}$ és $\vec{AB}$ vektorok szöge $180^\circ - x$, az $\vec{AB}$ és $\vec{BL}$ szöge $180^\circ - y$, végül $\vec{BL}$ és $\vec{KA}$ szöge $180^\circ - z$, továbbá a vektorok hossza is ismert. Így

$$(1) \quad KL^2 = KA^2 + AB^2 + BL^2 - 2KA \cdot AB \cdot \cos x - 2AB \cdot BL \cdot \cos y - 2BL \cdot KA \cdot \cos z,$$

amiből

$$(2) \quad 2a \cos x + 2b \cos y + 2c \cos z = \frac{ab}{c} + \frac{ac}{b} + \frac{bc}{a} - KL^2,$$

Így a kérdéses kifejezés a maximumát akkor veszi fel, amikor a KL távolság a minimumát. Ha most a fenti két kör metszi egymást, azaz

$$(3) \quad \sqrt{\frac{ab}{c}} < \sqrt{\frac{ac}{b}} + \sqrt{\frac{bc}{a}},$$

vagy $\sqrt{abc}$ -vel mindkét oldalt leosztva $1/c < 1/a + 1/b$, akkor K és L is eshet a metszéspontba, tehát a KL távolság minimuma 0, és (2) alapján az $a \cos x + b \cos y + c \cos z$ maximuma

$$\frac{1}{2} \left(\frac{ab}{c} + \frac{ac}{b} + \frac{bc}{a} \right).$$

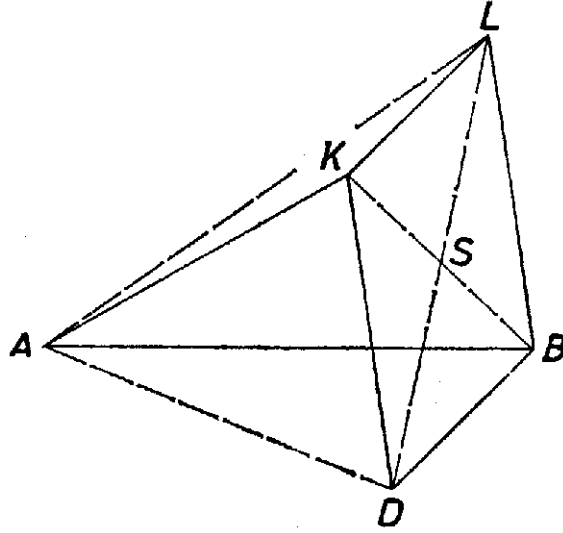
Ha viszont (3) nem teljesül, akkor a K és L pontok távolsága mindig több, mint $\sqrt{\frac{ab}{c}} - \sqrt{\frac{ac}{b}} - \sqrt{\frac{bc}{a}}$, azaz $a \cos x + b \cos y + c \cos z$ mindig több, mint

$$\frac{1}{2} \left(\frac{ab}{c} + \frac{ac}{b} + \frac{bc}{a} - \left(\sqrt{\frac{ab}{c}} - \sqrt{\frac{ac}{b}} - \sqrt{\frac{bc}{a}} \right)^2 \right) = a + b - c,$$

de ezt az értéket akármennyire megközelítheti.

Weisz Ferenc (Mohács, Kisfaludy K. Gimn., IV. o. t.)

Megjegyzés. Az (1) összefüggést vektorokra való hivatkozás nélkül is megkaphatjuk. Legyen D az a pont, amelyre $KLBD$ paralelogramma.



2. ábra

Ekkor, a cosinustétel alapján (2. ábra)

$$2KA \cdot AB \cdot \cos x = KA^2 + AB^2 - KB^2,$$

$$2AB \cdot BL \cdot \cos y = AB^2 + BL^2 - AL^2,$$

$$2BL \cdot KA \cos z = 2DK \cdot KA \cdot \cos z = DK^2 + KA^2 - AD^2,$$

Így (1) igazolásához azt kell megmutatnunk, hogy

$$(4) \quad KL^2 = KB^2 + AL^2 + AD^2 - (AB^2 + KA^2 + BL^2).$$

Jelöljük S -sel a $KLBD$ paralelogramma középpontját. Felhasználva, hogy minden paralelogrammában az oldalak és az átlók négyzetösszege megegyezik, továbbá hogy AS súlyvonal a KAB , valamint LAD háromszögekben, kapjuk, hogy

$$4AS^2 = 2AB^2 + 2AK^2 - KB^2,$$

$$4AS^2 = 2AL^2 + 2AD^2 - LD^2,$$

$$2KL^2 + 2BL^2 = LD^2 + KB^2.$$

Az első összefüggést a második és harmadik összegéből kivonva éppen (4)-et kapjuk.