I. megoldás. Ha adott a térben egy P pont és egy P-t nem tartalmazó S sík, a nem S-en levő pontokat két osztályba sorolhatjuk aszerint, hogy P-vel összekötve őket, S-et metsző vagy S-et nem metsző szakaszt kapunk-e. Belátható, hogy a tér S-hez nem tartozó pontjainak ilyen kettévágása nem függ a P pont megválasztásától. A kapott részeket nyílt féltereknek hívjuk, véges sok nyílt féltér közös részét pedig konvex poliédernek nevezzük, ha az korlátos és nem üres. (A tér valamely H ponthalmazát korlátosnak mondjuk, ha van a térben olyan P pont, és van olyan A valós szám, hogy H minden pontjának P-től mért távolsága kisebb A-nál.) Legyen K tetszőleges konvex poliéder, és tekintsük a K-t meghatározó síkokat. Ezek mindegyikéből a többiek egy–egy konvex sokszöget metszenek ki, e sokszögeket hívjuk K lapjainak. Lényeges, a konvexségből következő körülmény, hogy K-nak minden síkon csak egy lapja van, és K két lapjának csak egy közös oldala lehet. Legyen L a K-nak olyan lapja, amelynél több oldala K egyetlen lapjának sincs. Jelöljük n-nel L oldalainak a számát, és tekintsük K L-lel szomszédos lapjait. Ezek oldalszáma csak 3 és n közti egész szám lehet, a számuk viszont n, így biztosan van köztük kettő, amelynek egyenlő az oldalszáma.

II. megoldás. Felhasználjuk a konvex poliéderekre vonatkozó, Eulertől származó

$$L + C = \ + 2 \tag{1}$$

összefüggést, amelyben L a lapok, C a csúcsok és az élek számát jelöli. Tegyünk képzeletben minden él felezőpontjára két katicabogarat, és indítsuk el az egyiket az él egyik, a másikat az él másik végpontja felé. Mivel minden csúcsba legalább 3 él fut be, ha a bogarakat a csúcsok szerint számoljuk össze, legalább $3C$-t kapunk, viszont eredetileg 2 bogarunk volt. Emiatt

$$2 \geq 3C,$$

amiből (1) alapján kapjuk, hogy

$$6L + 4 \geq 6L + 6C = 6 + 12,$$

vagyis

$$6L \geq 2 + 12. \tag{2}$$

Jelöljük az i oldalszámú lapok számát S_i-vel, akkor

$$L = S_3 + S_4 + \cdots + S_n,$$

ahol n ismét az oldalak maximális számát jelöli, és

$$2 = 3S_3 + 4S_4 + \ldots + nS_n,$$

hiszen az éleket a lapok szerint összeszámolva, minden élt kétszer számolunk. Ezeket (2)-be helyettesítve kapjuk, hogy

$$6\sum_{i=3}^{n} S_i \geq \sum_{i=3}^{n} iS_i + 12.$$

Ha $n > 6$, és az összegezést mindkét oldalon csak 6-ig végezzük el, a jobb oldalt csökkentjük többel, tehát

$$6\sum_{i=3}^{6} S_i \geq \sum_{i=3}^{6} iS_i + 12.$$

Ebből végül is azt kapjuk, hogy

$$\sum_{i=3}^{6}(6-i)S_i = 3S_3 + 2S_4 + S_5 \geq 12,$$

tehát már S_3, S_4, S_5 között is biztosan található egynél nagyobb, hiszen ha $S_3 \leq 1$, $S_4 \leq 1$, $S_5 \leq 1$, akkor

$$3S_3 + 2S_4 + S_5 \leq 6.$$

Megjegyzés. Az (1) összefüggés nemcsak konvex poliéderekre igaz, hanem mindazokra a véges sok síklappal határolt testekre, amelyek ún. folytonos deformációval gömbbé alakíthatóak. Ilyen például, az ábrán látható test, amelynek érdekessége, hogy az alaplapjának több oldala van, mint ahány lapja egyáltalán a testnek van.