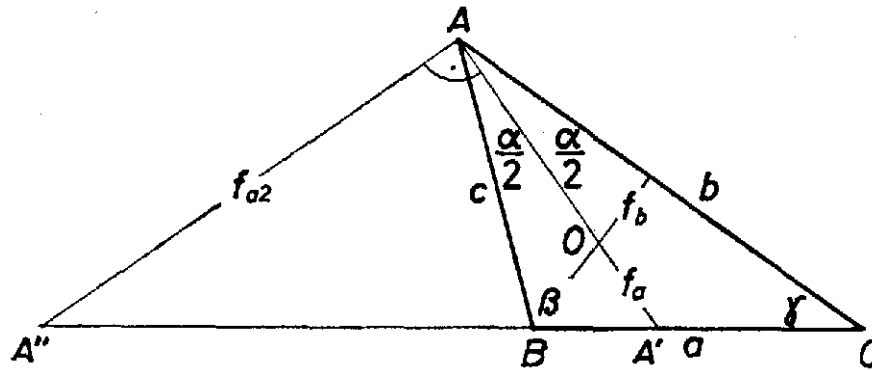


I. megoldás. Jelöljük az ABC háromszög egymás utáni oldalaihoz tartozó szögfelező hosszát $AA' = f_a$ -val, f_b -vel, f_c -vel. Az f_a két oldalán létrejött $AA'B$ és $AA'C$ háromszögek egy oldala közös, és A -nál levő szögük egyenlő. Ezekből ajánljuk: f_a -ra abból írjunk fel egyenletet, hogy a részháromszögek területeinek összege egyenlő az eredeti háromszög területével (1. ábra):



1. ábra

$$\frac{c+b}{2} f_a \sin \frac{\alpha}{2} = \frac{bc}{2} \sin \alpha.$$

Innen a $\sin 2x = 2 \sin x \cos x$ azonosság felhasználásával

$$f_a = \frac{2bc}{b+c} \cos \frac{\alpha}{2},$$

eszerint azon múlik az állítás helyessége, hogy az adott háromszögben a félszögek cosinusai racionális számok-e vagy nem.

Mármost egy trigonometriai azonosság és a cosinustétel felhasználásával (és mert $\alpha/2$ hegyesszög):

$$\begin{aligned} \cos \frac{\alpha}{2} &= +\sqrt{\frac{1+\cos \alpha}{2}} = +\sqrt{\frac{2bc + (b^2 + c^2 - a^2)}{4bc}} = \sqrt{\frac{(b+c)^2 - a^2}{4bc}} = \\ &= \sqrt{\frac{(b+c+a)(b+c-a)}{4bc}} = \sqrt{\frac{378 \cdot 210}{4 \cdot 5^3 \cdot 13^2}} = \frac{3 \cdot 21}{5 \cdot 13} (< 1), \end{aligned}$$

és ez racionális szám. Hasonlóan

$$\cos \frac{\beta}{2} = \frac{3 \cdot 2^2}{13} (< 1) \quad \text{és} \quad \cos \frac{\gamma}{2} = \frac{3}{5} (< 1)$$

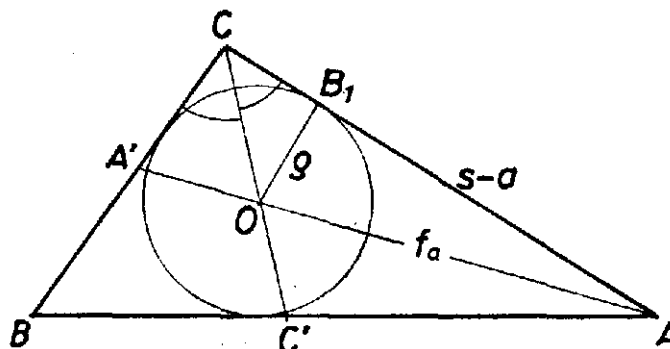
racionálisak. Ezzel bebizonyítottuk a feladat állítását.

II. megoldás. Legyen a beírt kör középpontja O , sugara ϱ , a háromszög területe t , kerülete $2s$. Az $AA'C$ háromszögben CO felezi a C -nél levő szöget, ezért a szögfelező felosztási arányára ismert tétel szerint

$$AO = \frac{CA}{CA + CA'} \cdot AA' = \frac{b}{b + \frac{b}{b+c} \cdot a} f_a \left(= \frac{b+c}{b+c+a} f_a \right),$$

tehát f_a – számadataink mellett – akkor és csak akkor racionális, ha AO mértékszámát racionális.

AO az $OB_1 = \varrho$ és $AB_1 = s - a = \frac{b+c-a}{2}$ befogókkal meghatározott derékszögű háromszög átfogója.



2. ábra

A Herón-féle területképlet felhasználásával

$$\varrho = \frac{t}{s} = \frac{1}{s} \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} = \sqrt{\frac{105 \cdot 64 \cdot 20}{189}} = \sqrt{\frac{100 \cdot 64}{9}} = \frac{80}{3},$$

és Pitagorasz tétele alapján

$$AO = \sqrt{\left(\frac{80}{3}\right)^2 + 105^2} = \frac{325}{3}.$$

Ugyanígy

$$BO = \frac{208}{3} \quad \text{és} \quad CO = \frac{100}{3},$$

ezek szerint f_a , valamint f_b és f_c mértékszáma is racionális, amint a feladat állítja.

Megjegyzések. 1. A feladat kitűzésére az adott indítékot, hogy *dr. Kelemen József*, a miskolci műegyetem adjunktusa cikket tett közzé „A matematika tanítása” című tanári folyóirat XXVIII. évfolyamának 1. számában (1981. február) az olyan háromszögekről, amelyeknek oldalai és szögfelezői racionális számok. Tétele: egy háromszögnek akkor és csak akkor racionálisak az oldalai és a szögfelezői, ha az oldalak előállíthatók a következő alakban:

$$\begin{aligned} a &= r(p-q)(1+pq)((1+pq)^2 - (p-q)^2), \\ b &= rq(1-q^2)(1+p^2)^2, \\ c &= rp(1-p^2)(1+q^2)^2, \end{aligned}$$

ahol p , q és r pozitív racionális számok és $q < p < 1$. Példánkban a paraméterek $p = 2/3$ és $q = 1/2$ voltak, és $r = 216$ mellett az oldalak mértékszámai egészek lettek.

A cikkben a következő összefüggés is megtalálható:

$$t = \frac{(a+b)(a+c)(b+c)f_a f_b f_c}{8abcs}.$$

A paraméterek jelentése

$$p = \operatorname{tg} \frac{\alpha + \beta}{4}, \quad q = \operatorname{tg} \frac{\beta}{4}.$$

Ezekből következik, hogy $(\alpha + \beta)/2$ -nek és $\beta/2$ -nek mindegyik szögfüggvénye racionális, tehát $\alpha/2$ -nek is, $\gamma/2$ -nek is, hiszen — mint ismeretes, $\operatorname{tg} x/2 = u$ jelöléssel

$$\sin x = \frac{2u}{1+u^2}, \quad \cos x = \frac{1-u^2}{1+u^2}, \quad \operatorname{tg} x = \frac{2u}{1-u^2},$$

(az utóbbi csak akkor, ha $u \neq \pm 1$).

A háromszög eredeti szögeinek szögfüggvényei már

$$\sin \alpha = \frac{2t}{bc}, \quad \cos \alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc};$$

alapján is racionálisak (ha $\cos \alpha \neq 0$).

Ezek alapján az $AA'' = f_{a2}$ külső szögfelező is racionális, mert $AA''C - AA''B = ABC$, $f_{a2} = \frac{2bc}{b-c} \sin \frac{\alpha}{2}$.

2. Mindezek szerint a vizsgált háromszög-osztály különleges részét alkotja a Herón-háromszögek osztályának, amelynek jellemzése: a , b , c és t racionális. Ezekből $\operatorname{tg} \alpha/2$, $\operatorname{tg} \beta/2$, $\operatorname{tg} \gamma/2$ is racionális, de pl. $\sin \alpha/2$, $\cos \alpha/2$ magában általában nem. (A vizsgált osztály háromszögeit mindegyik szögfelező két heróni részháromszögre osztja.)