(1) $$f(x)+f(y)=f\big(f(x)+y\big)$$

I. megoldás. Elegendő azt megmutatni, hogy $f(0)=0$, mivel ekkor (1)-be $y=0$-t írva kapjuk a bizonyítandó állítást.

Képezzük $i=0,\ 1,\ 2,\ \ldots$-re az $a_0=0$, $a_{i+1}=f(a_i)$ rekurzióval definiált sorozatot. Mivel f a $0\leqq x\leqq 1$ intervallumon értelmezett és $0\leqq f(x)\leqq 1$, ez egy értelmes definíció, és $0\leqq a_i\leqq 1$ minden i-re. Írjunk (1)-ben x helyébe a_i-t és y helyébe 0-t:

$$f(a_i)+f(0)=f\big(f(a_i)\big),$$

vagyis

$$a_{i+1}+f(0)=a_{i+2},$$

tehát minden $k\geqq 1$-re

$$a_{k+1}-a_k=f(0).$$

Ez pedig azt jelenti, hogy az $a_1,\ a_2,\ \ldots$ sorozat egy $f(0)$ különbségű számtani sorozat, melynek minden tagja a $[0,\ 1]$ intervallumba esik. Ez pedig csak $f(0)=0$ esetén lehetséges.

Megyesi Gábor (Szeged, Ságvári E. Gyak. Gimn., I. o. t.)

II. megoldás. Újabb bizonyítását adjuk annak, hogy a feladat feltételeinek teljesülése esetén $f(0)=0$.

$0\leqq f(x)\leqq 1$, tehát $f\big(f(x)\big)$ értelmezve van a $[0,\ 1]$ intervallumon. Tegyük fel, hogy $f(0)>0$. Mivel $f(x)$ értékkészlete korlátos, van legkisebb felső korlátja, legyen ez A. Mivel $f(0)>0$, van olyan x, hogy $f(x)>A-\dfrac{f(0)}{2}$.

Ekkor

$$f\big(f(x)\big)=f(x)+f(0)>A-\frac{f(0)}{2}+f(0)>A,$$

ellentmondás. Így tehát $f(0)=0$.

Szabó Endre (Budapest, Fazekas M. Gyak. Gimn., IV. o . t.)