

$$\begin{aligned}
x_1 &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \\
x_2 &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n \\
&\vdots \\
x_n &= a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n
\end{aligned}
\tag{1}$$

Az állítás $n = 1$ -re igaz: ha $x_1 = a_{11}x_1$ és a_{11} páros, akkor x_1 szükségképpen 0. Most tegyük fel, hogy a feladat állítását már tudjuk $(n - 1)$ -re, és küszöböljük ki a fenti (1) egyenletrendszerből x_n -et a következőképpen.

(1) utolsó egyenlete alapján

$$(1 - a_{nn})x_n = a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{n,n-1}x_{n-1}.$$

Szorozzuk meg (1) többi egyenletét $(1 - a_{nn})$ -nel, és $(1 - a_{nn})x_n$ helyébe írjuk be (2) jobb oldalát. Az i -edik egyenlet, ahol $1 \leq i \leq n - 1$, így alakul:

$$\begin{aligned}
(1 - a_{nn})x_i &= (1 - a_{nn})a_{i1}x_1 + (1 - a_{nn})a_{i2}x_2 + \dots + (1 - a_{nn})a_{i,n-1}x_{n-1} + a_{in}a_{n1}x_1 + \\
&\quad + a_{in}a_{n2}x_2 + \dots + a_{in}a_{n,n-1}x_{n-1},
\end{aligned}$$

vagyis átrendezve

$$\begin{aligned}
x_1 &= b_{11}x_1 + b_{12}x_2 + \dots + b_{1,n-1}x_{n-1}, \\
x_2 &= b_{21}x_1 + b_{22}x_2 + \dots + b_{2,n-1}x_{n-1}, \\
&\vdots \\
x_{n-1} &= b_{n-1,1}x_1 + b_{n-1,2}x_2 + \dots + b_{n-1,n-1}x_{n-1}.
\end{aligned}
\tag{3}$$

ahol $b_{ii} = (1 - a_{nn})a_{ij} + a_{in}a_{ni} + a_{nn}$, valamint $i \neq j$ esetén

$$b_{ij} = (1 - a_{nn})a_{ij} + a_{in}a_{nj}.$$

Látható, hogy a (3)-ban szereplő b_{ij} együtthatók mind páros egész számok, tehát feltevésünk alapján (3)-nak csak az $x_1 = x_2 = \dots = x_{n-1} = 0$ megoldása van. S mivel ha (1) teljesül, akkor teljesül (3) is, azért (1) összes $x_1, x_2, \dots, x_n$ megoldására $x_1 = x_2 = \dots = x_{n-1} = 0$. Ekkor (1) utolsó egyenletéből $x_n = a_{nn}x_n$, ahonnan x_n értéke is szükségképpen 0.

A feladat állítását $n = 1$ -re ellenőriztük, továbbá igazoltuk, hogy ha az igaz $(n - 1)$ -re, akkor igaz n -re is. Így a teljes indukció elve alapján az állítást minden pozitív egész n -re bizonyítottuk.

Megjegyzés. Többen észrevették, hogy (1) egy ún. *homogén lineáris egyenletrendszer*, melynek akkor és csak akkor nincs az $x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0$ -tól különböző megoldása, ha az egyenletrendszer determinánsa, azaz

$$\begin{vmatrix}
a_{11} - 1, & a_{12} & \dots & a_{1n} \\
a_{21}, & a_{22} - 1 & \dots & a_{2n} \\
\vdots & \vdots & & \vdots \\
a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} - 1
\end{vmatrix}$$

nem nulla. Ezt egyeseknek sikerült bebizonyítani, míg voltak olyanok, akik szerint ez „nyilvánvaló”. Az, hogy a determináns értéke nem nulla, következik például abból, hogy páratlan egész szám az értéke.