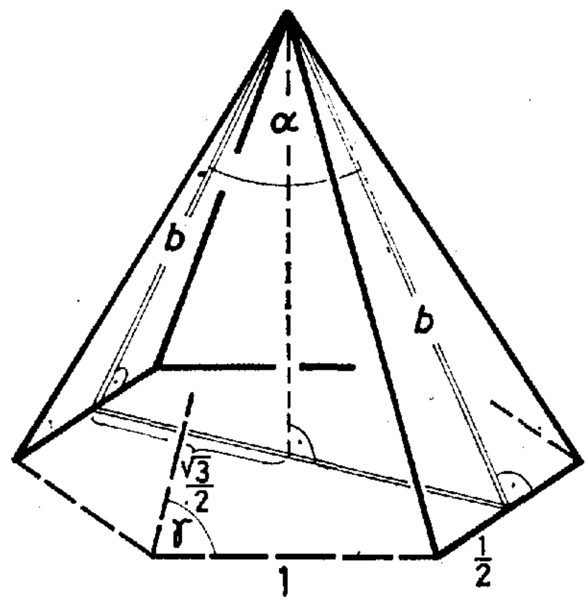
Egy konvex poliéder tetszőleges két lapjának hajlásszögén a lapokat tartalmazó, közös határegyenesű *félsíkok* hajlásszögét értjük. A lapszöget azzal a szöggel mérjük, melynek szárai a lapszög lapjain a határegyenesre merőlegesen helyezkednek el, szögtartománya pedig a lapszög belsejében van. Két lap hajlásszöge $0°$ és $180°$ közé eshet. Feltételezzük, hogy a gúla nem fajul el sem hasábbá, sem síklappá, így $0° < \alpha < 180°$ és $0 < \beta < 180°$.




*1. ábra*

Nyilvánvalóan $\alpha$ vagy $\beta$ már egymaga meghatározza a szabályos hatoldalú gúla alakját (szögeit), ezért együttes megadásuk a feladatban szükségessé teszi annak vizsgálatát, hogy milyen összefüggésnek kell fennállnia közöttük.

A kérdezett szög természetesen egymáshoz csatlakozó oldalél és alapél hajlásszöge; ez pedig a közös csúcspontból kiinduló, az éleket tartalmazó félegyenesek hajlásszöge, vagyis a félegyenesek által meghatározott két síkbeli szögtartomány közül a nem nagyobbiknak a szöge.

A gúla főcsúcsából kiinduló, a gúla két szemközti oldallapjának az alapélekhez tartozó magasságait tartalmazó félegyenesek hajlásszöge egyenlő $\alpha$-val (1. ábra). A szabályos hatszög szemközti oldalai ugyanis párhuzamosak, a rájuk illeszkedő oldallapok síkjainak metszésvonala (az oldallapokat tartalmazó félsíkok közös határvonala) is párhuzamos velük, ezért az említett magasságok merőlegesek a két sík metszésvonalára is.

Legyen a gúla alapéle egységnyi. Jelölje $b$ és $d$ az oldallapok alapélhez, ill. oldalélhez tartozó magasságát, $c$ az oldalélek hosszát, $\gamma$ pedig a keresett szöget.

A szimmetria miatt a gúla magassága felezi az $\alpha$ szöget. $\frac{\alpha}{2}$ ezért egy olyan derékszögű háromszög hegyesszöge, amelynek átfogója $b$, $\frac{\alpha}{2}$-vel szemközti befogója pedig $\frac{\sqrt{3}}{2}$, mivel az egységnyi oldalú szabályos hatszög szemközti oldalainak távolsága $\sqrt{3}$. Ezek szerint

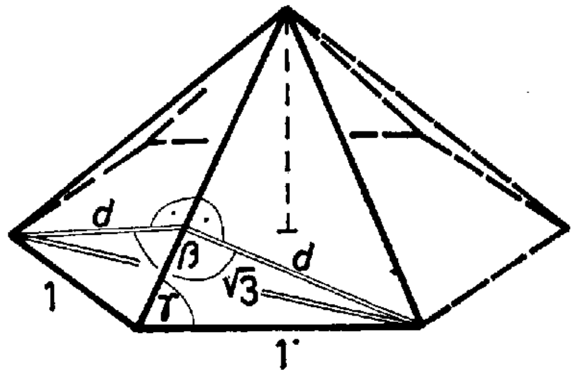
$$b = \frac{\sqrt{3}}{2\sin\frac{\alpha}{2}},$$

$\gamma$ viszont egy olyan derékszögű háromszög hegyesszögének tekinthető, amelynek $\gamma$-val szemközti befogója $b$, másik befogója $\frac{1}{2}$. Ebből következik, hogy

$$\operatorname{tg}\gamma = 2b = \frac{\sqrt{3}}{\sin\frac{\alpha}{2}}.$$

Mivel $0° < \frac{\alpha}{2} < 90°$ és $\gamma$ hegyesszög, megállapítható, hogy $60° < \gamma < 90°$.

Keressünk most $\beta$ és $\gamma$ között kapcsolatot. Tekintsük a gúla két szomszédos oldallapjának a közös oldalélhez tartozó magasságát. A szimmetria miatt ezek talppontjai egybeesnek. A lapok hajlásszögéről mondottak alapján e magasságok egy $\beta$ nagyságú szög szárainak kezdő szakaszai. Abban az egyenlő szárú háromszögben, amelynek alapja $\sqrt{3}$, szárai pedig $d$ hsszúságúak, a szárak által bezárt szög $\beta$.




*2. ábra*

Így

$$d = \frac{\sqrt{3}}{2\,\sin\dfrac{\beta}{2}}.$$

Ennek alapján

$$\sin\gamma = d = \frac{\sqrt{3}}{2\,\sin\dfrac{\beta}{2}}.$$

Mivel $\dfrac{\sqrt{3}}{2} < d < 1$, ezért $120^\circ < \beta < 180^\circ$. $\gamma$-ra természetesen itt is azt kapjuk, hogy $60^\circ < \gamma < 90^\circ$.

Kézenfekvő, hogy az $\alpha$ és $\beta$ közötti összefüggést a $\gamma$-ra kapott képletekből állapítsuk meg.

Mivel $\gamma$ hegyesszög,

$$\sin\gamma = \frac{\operatorname{tg}\gamma}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\gamma}}.$$

Ennek alapján

$$\frac{\sqrt{3}}{2\,\sin\dfrac{\beta}{2}} = \frac{\dfrac{\sqrt{3}}{\sin\dfrac{\alpha}{2}}}{\sqrt{1+\dfrac{3}{\sin^2\dfrac{\alpha}{2}}}}.$$

Azonos átalakítások révén – figyelembevéve, hogy $\dfrac{\alpha}{2}$ és $\dfrac{\beta}{2}$ hegyesszögek – a következő összefüggésekre juthatunk:

$$\sin^2\frac{\alpha}{2} + 3 = 4\sin^2\frac{\beta}{2},$$

vagy

$$\cos\frac{\alpha}{2} = 2\cos\frac{\beta}{2}.$$

*Szállási Zoltán* (Esztergom, Dobó K. Gimn., IV. o. t.)