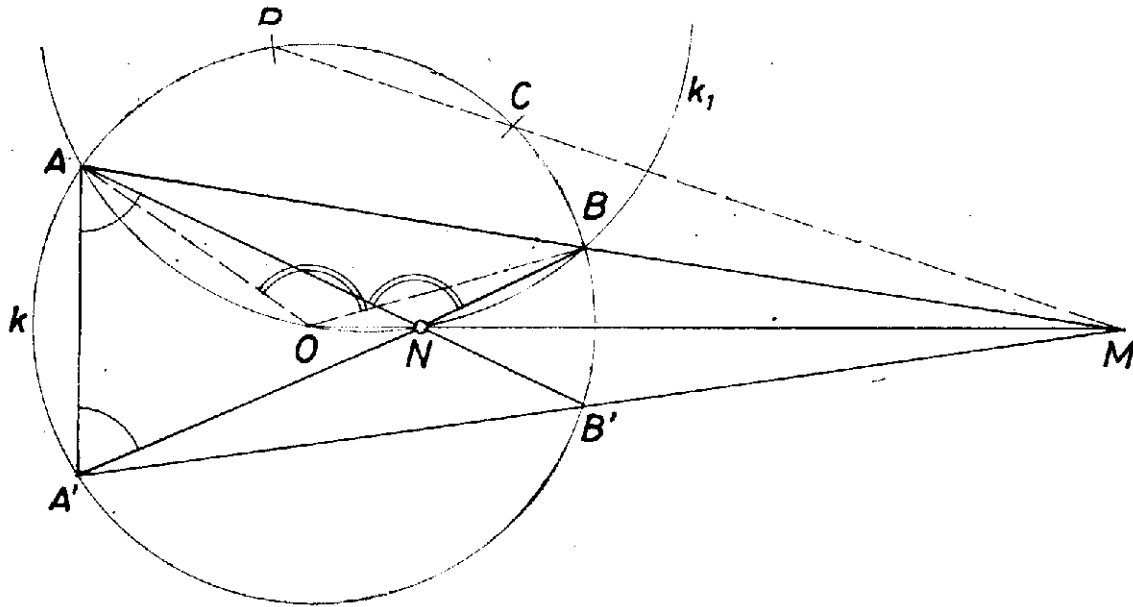


Jelöljük az $ABCD$ négyszög köré írt kört k -val, az OAB és OCD háromszögek köré írt köröket k_1 -gyel és k_2 -vel. Vizsgáljuk először azt az esetet, amikor az AB , CD egyenesek metszik egymást, és egyikük sem átmérője k -nak.



Jelöljük az AB , CD egyenesek metszéspontját M -mel. Mivel az $ABCD$ négyszög konvex, M a k -n kívül van. Tükrözzük A -t és B -t az MO egyenesre, és jelöljük a tükröképeket A' -vel, B' -vel, az $ABB'A'$ szimmetrikus trapéz átlóinak metszéspontját pedig N -nel. N nem lehet azonos O -val, hiszen ekkor AB , $A'B'$ és CD párhuzamosak lennének. A tükrözés miatt az $AA'N$ háromszög egyenlő szárú, és az AA' alapján levő szögeinek összege egyenlő a háromszög ANB külső szögével. Az AB szakasz tehát az AB egyenes azonos oldalán levő O és N pontokból egyenlő szögek alatt látszik, hiszen mindkét szög egyenlő az $AA'B$ szög kétszeresével. (Az AOB szög az $AA'B$ kerületi szöghöz tartozó középponti szög.) Emiatt N rajta van k_1 -en, és a körhöz külső pontból húzott szelők darabjaira vonatkozó ismert összefüggés szerint

$$(1) \quad MA \cdot MB = MO \cdot MN.$$

Ha most a CD szakaszt is tükrözzük az MO egyenesre, és a $CDD'C'$ trapéz átlóinak a metszéspontját L -vel jelöljük, akkor hasonlóan kapjuk, hogy

$$(2) \quad MC \cdot MD = MO \cdot ML.$$

Mivel (1) és (2) bal oldalán a k kör két M -en átmenő szelőjének a darabjait szoroztuk össze, e szorzatok egyenlők, tehát $MN = ML$. Az N és L pontok k -beli trapézok átlóinak a metszéspontjai, tehát az MO egyenesen az M -nak ugyanazon az oldalán vannak, így N és L csak azonos lehet. Mivel N a k_1 -en, L a k_2 -n van, e pontok Q -val is azonosak. (Láttuk, hogy N és L az O -tól különböző pontok.) A feladat állítása ezek után a k kör Q -n átmenő AB' , CD' húrvaira vonatkozó

$$AQ \cdot QB' = CQ \cdot QD'$$

összefüggés következménye.

Ha az AB egyenes k átmérője, akkor k_1 szerepét az AB egyenes veszi át, és az állítás a fenti bizonyítással együtt lényegében érvényben marad. Ha AB és CD párhuzamosak, akkor az O -n átmenő, velük párhuzamos egyenes érinti a k_1 , k_2 köröket, azok tehát egymást is érintik. Így ebben az esetben Q azonos O -val, és az állítás nyilvánvaló.