

A háromszögben szokásos jelölésekkel

$$\cos \alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{(a^2 + b^2 + c^2) - 2a^2}{2bc} = \frac{a(a^2 + b^2 + c^2)}{2abc} - \frac{a^3}{abc}.$$

A $\cos \beta$ -ra és $\cos \gamma$ -ra fölírt hasonló kifejezésekkel

$$(1) \quad \cos \alpha + \cos \beta + \cos \gamma = \frac{(a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2)}{2abc} - \frac{(a^3 + b^3 + c^3)}{abc}.$$

A jobb oldalon az a, b, c oldalaknak ún. szimmetrikus kifejezéseit látjuk. (Szimmetrikusnak mondunk egy kifejezést, ha a benne szereplő változók sorrendjét tetszés szerint megváltoztatva, a kifejezés változatlan marad.)

Mivel a, b és c az adott egyenlet gyökei, behelyettesítésükkel teljesülnek:

$$a^3 - pa^2 + qa - r = 0,$$

$$b^3 - pb^2 - qb - r = 0,$$

$$c^3 - pc^2 + qc - r = 0,$$

tehát összeadással, átrendezéssel

$$(2) \quad a^3 + b^3 + c^3 = p(a^2 + b^2 + c^2) - q(a + b + c) + 3r.$$

Másrészt azt is tudjuk, hogy egyetlen olyan harmadfokú egyenlet van, amelynek az a, b, c számok a gyökei és a harmadfokú tag együtthatója $(+1)$, éspedig a következő:

$$(x - a)(x - b)(x - c) = 0,$$

kifejtve

$$x^3 - (a + b + c)x^2 + (ab + ac + bc)x - abc = 0.$$

Eszerint a föltevással ekvivalens, hogy

$$a + b + c = p,$$

$$abc = r,$$

$$ab + ac + bc = q,$$

így pedig

$$a^2 + b^2 + c^2 = (a + b + c)^2 - 2(ab + ac + bc) = p^2 - 2q,$$

továbbá (2)-ből

$$a^3 + b^3 + c^3 = p(p^2 - 2q) - qp + 3r = p^3 - 3pq + 3r.$$

Mindezek alapján (1) jobb oldala az egyenlet együtthatóival így alakul:

$$\frac{p(p^2 - 2q)}{2r} - \frac{p^3 - 3pq + 3r}{r} = \frac{-p^3 + 4pq - 6r}{2r},$$

amint azt a feladat állítja.