

Megmutatjuk, hogy a mondott feltételek mellett a bal oldal minden tagja kisebb a -nál, ebből a bizonyítandó egyenlőtlenség azonnal következik. Jelöljük a bal oldalon a k -adik tagot A_k -val.

Először is $A_1 < a$, mivel $\sqrt{a} < a$ alapján

$$A_1 = \sqrt{1 + \sqrt{a}} < \sqrt{1 + a} \leq \sqrt{1 + a} \cdot \sqrt{-1 + a} = \sqrt{a^2 - 1} < a.$$

Ha már tudjuk, hogy $A_k < a$ valamely $k \geq 1$ -re, akkor

$$\begin{aligned} A_{k+1}^2 - 1 &= \sqrt{a + \sqrt{a^2 + \dots + \sqrt{a^{k+1}}}} < \sqrt{a + \sqrt{a^3 + \dots + \sqrt{a^{k+2^k}}}} = \\ &= \sqrt{a} \sqrt{1 + \sqrt{a + \dots + \sqrt{a^k}}} = \sqrt{a} \cdot A_k < a\sqrt{a}. \end{aligned}$$

Ezért az $A_{k+1} < a$ a igazolásához – és a teljes indukció elve alapján a feladat állításának bizonyításához – mindössze azt kell megmutatnunk, hogy $a \geq 2$ esetén $a\sqrt{a} \leq a^2 - 1$.

Átrendezve

$$a - \sqrt{a} + \frac{1}{4} \geq \frac{1}{a} + \frac{1}{4}.$$

Ez pedig igaz, mert a bal oldal $(\sqrt{a} - 1/2)^2 \geq (\sqrt{2} - 1/2)^2 > 3/4$ és a jobb oldal értéke legfeljebb $1/2 + 1/4 = 3/4$.

Megjegyzések. 1. Azt bizonyítottuk, hogy az $A_1, A_2, A_3, \dots$ sorozat minden tagja a alatt marad. Ez pedig – mivel a sorozat nyilvánvalóan szigorúan monoton növekvő – egyúttal azt is jelenti, hogy az $\{A_n\}$ sorozat *konvergens*. S ez nemcsak $a \geq 2$ esetén van így, hanem minden pozitív a esetén.

Például a

$$B_n = \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \dots + \sqrt{1}}}} \quad (n + 1 \text{ darab egyes}) \text{ sorozat határértéke } 1,6180\dots$$

2. Az is belátható, hogy az A_n sorozat tagjaira $n \geq 2$ és $a \geq 2$ esetén

$$\sqrt{1 + \sqrt{2}\sqrt{a}} \leq A_n < \sqrt{1 + \sqrt{a}(1 + \sqrt{3})}.$$