*a)* Vizsgáljuk először azt az esetet, amikor $A_2 < A_1$. Tegyük fel, hogy a háromoldalú csonka gúla elmetszhető az alaplapjával párhuzamos síkkal a kívánt módon. Jelöljük a síkmetszet területét $A$-val. Tekintsük a részekbe (ugyancsak háromoldalú csonka gúlákba) beírt gömböket. A nagyobb gömb sugarát jelöljük $R_1$-gyel, a kisebbét $R_2$-vel. Bármely két gömb hasonló, sőt hasonló helyzetű is, bármely pontot véve a hasonlóság centrumának. Esetünkben a gömbök külső hasonlósági pontja annak a gúlának a főcsúcsa ($H$), amelyből az eredeti csonka gúla származtatható. Ez a pont ugyanis rajta van a gömbök három különböző közös külső érintősíkján.

Az a $H$ középpontú nyújtás, melynél az $R_2$ sugarú gömb képe az $R_1$ sugarú gömb, az $A_2$ területű lapot az $A$ területűbe, az $A$ területűt pedig az $A_1$ területűbe viszi át, hiszen e lapok síkjai egymással párhuzamos érintősikok. Ebből következik, hogy a csonka gúla két része hasonló egymáshoz; a hasonlóság lineáris aránya egyenlő a beléjük írt gömbök sugarainak arányával. Ennek alapján

$$\frac{A}{A_2} = \frac{A_1}{A} = \left(\frac{R_1}{R_2}\right)^2,$$

ahonnan

$$A = \sqrt{A_1 A_2}.$$

Jelöljük az $R_1$, ill. $R_2$ sugarú gömb köré írt csonka gúla palástjának területét $P_1$-gyel, ill. $P_2$-vel. A feladatban szereplő $P$ ezek összegével egyenlő. Annak érdekében, hogy $P$-t $A_1$, $A_2$-vel kapcsolatba hozzuk, térfogatra vonatkozó összefüggéseket használunk fel. A csonka gúla ismert térfogat képlete:

$$V = \frac{m}{3}(T + \sqrt{Tt} + t).$$

Másfelől minden olyan konvex poliéder, amelybe gömb írható, felbontható olyan gúlákra, amelyek közös magassága a beírt gömb sugara, azok az alaplapok pedig, amelyekhez ez a magasság tartozik, együttesen a test határoló lapjait adják. Az ilyen test térfogata ezért egyenlő a test felszíne és a beírt gömb sugara szorzatának a harmadrészével. Írjuk fel pl. az $R_1$ sugarú gömb köréírt csonka gúla térfogatát mindkét módon. Nyilvánvaló, hogy a magasság a gömb átmérője.

$$\frac{2R_1}{3}(A_1 + \sqrt{A_1 A} + A) = \frac{R_1}{3}(A_1 + A + P_1).$$

Az egyenletből

$$P_1 = A_1 + 2\sqrt{A_1 A} + A = (\sqrt{A_1} + \sqrt{A})^2,$$

és hasonlóan

$$P_2 = (\sqrt{A} + \sqrt{A_2})^2.$$

Felhasználva az $A = \sqrt{A_1 A_2}$ összefüggést,

$$P_1 = \sqrt{A_1}\left(\sqrt[4]{A_1} + \sqrt[4]{A_2}\right)^2$$

adódik. Hasonló módon kapjuk, hogy

$$P_2 = \sqrt{A_2}\left(\sqrt[4]{A_1} + \sqrt[4]{A_2}\right)^2.$$

$$P = P_1 + P_2 = (\sqrt{A_1} + \sqrt{A_2})\left(\sqrt[4]{A_1} + \sqrt[4]{A_2}\right)^2.$$

amit bizonyítanunk kellett.

*b)* Az $A_1 = A_2$ esetben háromoldalú hasábbal van dolgunk. Ekkor $A$ is egyenlő a közös értékkel. A bizonyítandó állítás a

$$P = 8A$$

összefüggésre egyszerűsödik. Ha a részekbe gömb írható, a metsző sík a hasábot félmagasságban vágja ketté, és a magasság fele egyenlő az átmérővel. A gömbök sugara legyen $R$. Az egyik részre felírva a térfogattal egyenlő kifejezéseket

$$2RA = \frac{R}{3}\left(2A + \frac{P}{2}\right),$$

ahonnan

$$P = 8A.$$

**(L. L.)**

*Nyikes Péter* (Miskolc, Földes F. Gimn., III. o. t.)

*Megjegyzés.* A megoldás során sehol sem használtuk ki, hogy a feladatban szereplő csonka gúla háromoldalú.