

$$(1) \quad xy + xz = 10, \quad yz + yu = 6, \quad zu + zx = 2, \quad ux + uy = -2.$$

I. megoldás. A két szélső egyenlet összegéből a két középső összegét levonva azt kapjuk, hogy $(x - z)(y + u) = 0$. Így tehát vagy $x = z$ vagy $y = -u$. Továbbá ha ezek bármelyike, és az (1) egyenletrendszer első három egyenlete is teljesül, akkor teljesül a negyedik is.

Az első esetben helyettesítsünk az első három egyenletben z helyébe x -et. Mindjárt szorzattá alakítva

$$(2) \quad x(x + y) = 10, \quad y(u + x) = 6, \quad x(u + x) = 2.$$

A második és harmadik összefüggés szerint $y = 3x$ (hiszen $u + x$ nem lehet 0), ezért (2) első egyenletébe helyettesítve $x^2 = 10/4$, ahonnan- a gyökök ($u = -x + 2/x$ és $z = x$ alapján)

x	y	z	u
$\frac{\sqrt{10}}{2}$	$\frac{3\sqrt{10}}{2}$	$\frac{\sqrt{10}}{2}$	$-\frac{1}{\sqrt{10}}$
$-\frac{\sqrt{10}}{2}$	$-\frac{3\sqrt{10}}{2}$	$-\frac{\sqrt{10}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{10}}$

Ezek előbbi megjegyzésünk értelmében megoldásai (1)-nek, hiszen (2)-ben mindhárom egyenlet teljesül.

A második esetben $y = -u$. Írjunk tehát (1)-ben u helyett $(-y)$ -t:

$$(3) \quad xy + xz = 10; \quad yz - y^2 = 6, \quad -yz + xz = 2.$$

A (3) második egyenletéből z -t, az elsőből x -et kifejezzük y segítségével:

$$(4) \quad z = \frac{6 + y^2}{y}, \quad x = \frac{10}{y + z} = \frac{10}{y + (6 + y^2)/y} = \frac{5y}{3 + y^2}.$$

Ha tehát z -t, illetve x -et így választjuk, akkor (3)-ban az első két egyenlet biztosan teljesül. Ahhoz, hogy a harmadik is teljesüljön, y -t úgy kell választanunk, hogy

$$-y \cdot \frac{6 + y^2}{y} + \frac{5y}{3 + y^2} \cdot \frac{6 + y^2}{y} = 2,$$

azaz $y^4 + 6y^2 - 6 = 0$ is igaz legyen. Ezt megoldva (csak a valós megoldásokat tekintve) kapjuk a további gyököket, melyek – az előzőkhöz hasonlóan láthatóan – (1)-nek is megoldásai:

x	y	z	u
$\frac{5\sqrt{-3 + \sqrt{15}}}{\sqrt{15}}$	$\sqrt{-3 + \sqrt{15}}$	$\frac{3 + \sqrt{15}}{\sqrt{-3 + \sqrt{15}}}$	$-\sqrt{-3 + \sqrt{15}}$
$-\frac{5\sqrt{-3 + \sqrt{15}}}{\sqrt{15}}$	$-\sqrt{-3 + \sqrt{15}}$	$-\frac{3 + \sqrt{15}}{\sqrt{-3 + \sqrt{15}}}$	$\sqrt{-3 + \sqrt{15}}$

Az egyenletrendszernek tehát a fent felsorolt négy megoldása van.

Megyesi Gábor (Szeged, Ságvári E. Gyak. Gimn., I. o. t.)

II. megoldás. Ha az (1) egyenletek jobb oldalait a, b, c, d -vel jelöljük, továbbá bevezetjük az $xz = A, uy = B$ jelöléseket, az egyenletrendszer a következőképpen alakul:

$$xy = a - A, \quad yz = b - B, \quad zu = c - A, \quad ux = d - B.$$

Ebből

$$(5) \quad (a - A)(c - A) = AB, \quad (b - B)(d - B) = AB.$$

Ha (5) első egyenletéből B -t kifejezzük, és behelyettesítjük a másodikba, akkor átrendezés után azt kapjuk, hogy

$$(6) \quad (a + b + c + d)A^3 - (ab + ac + ad + bc + bd + cd + (a + c)^2)A^2 + ac(2a + b + 2c + d)A - a^2c^2 = 0.$$

Ennek megoldásait ismerve az eredeti (1) egyenletrendszert már könnyen megoldhatjuk: (5) első egyenletéből B értékét kapjuk, s ezzel az xy , yz , xu stb. kettős szorzatok értékét is tudjuk. Ezekből például x^2 a következőképpen kapható:

$$x^2 = \frac{xy \cdot xz}{yz} = \frac{(a-A)A}{b-B}.$$

Esetünkben $a = 10$, $b = 6$, $c = 2$, $d = -2$, tehát a (6) egyenlet a következőképpen alakul:

$$16A^3 - 200A^2 + 560A - 400 = 0.$$

Szerencsénkre ennek bal oldala szorzattá alakítható:

$$8(2A - 5)(A^2 - 10A + 10) = 0,$$

ahonnan A lehetséges értékei $5/2$, $5 - \sqrt{15}$, $5 + \sqrt{15}$. Ezekből a már felírt megoldásokat kapjuk meg.